Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 9

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. И. БЕГИАШВИЛИ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДАВЛЕНИЯ СИСТЕМЫ ЖЕСТКИХ ПРОФИЛЕЙ НА ПРЯМОЛИНЕЙНУЮ ГРАНИЦУ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 18 III 1940)

§ 1. Н. И. Мусхелишвили ([1]) указал простой способ решения задачи давления жесткого профиля на границу упругой полуплоскости при отсутствии трения. По этому способу задача сводится к определению функции, гармонической на всей плоскости, разрезанной вдоль прямолинейного отрезка, принимающей на краях разреза заданные значения и удовлетворяющей определенному условию на бесконечности (см. ниже).

Совершенно аналогично может быть решена задача и тогда, когда имеется несколько раздельных профилей. И в этом случае результат может быть представлен в замкнутом виде, если воспользоваться остроумным приемом решения соответствующей задачи теории потенциала, указанным М. В. Келдышем и Л. И. Седовым ([2]).

Будем для определенности считать, что жесткие профили заданной формы, опирающиеся на границу Ox упругой полуплоскости (занимающей область $y \leqslant 0$), неизменно связаны между собою, составляя одну жесткую систему, и что эта система может перемещаться лишь в направлении оси Oy; будем, кроме того, считать заданной силу P, прижимающую систему профилей к границе.

Пусть жесткие профили соприкасаются с границей упругой полуплоскости вдоль участков

$$a_k \leqslant t \leqslant b_k \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{1}$$

где t обозначает абсциссу на оси Ox.

По способу Н. И. Мусхелишвили задача сводится к нахождению давления $p(t)$ профилей на участках (1).

Функция $p(t)$ определяется интегральным уравнением первого рода ([1], стр. 344)

$$\int_S p(t) \log|t - t_0|\, dt = Q(t_0), \tag{2}$$

где S — совокупность участков (1), t_0 — произвольная точка любого из этих участков, а $Q(t)$ — заданная на S функция, а именно

$$Q(t) = \frac{4\pi\mu}{1+\varkappa} f_k(t) \qquad (a_k \leqslant t \leqslant b_k,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n); \tag{3}$$

$f_k(t)$ обозначает заданные, с точностью до одной и той же постоянной, нормальные смещения точек границы под профилями, определяемые формой профилей, μ и $\varkappa$ — упругие постоянные. Уравнению (2) требуется удовлетворить лишь с точностью до произвольной постоянной в правой части, одной и той же для всех участков (1).

Задача определения $p(t)$ сводится в свою очередь к определению функции $U(x, y)$, гармонической во всей плоскости, разрезанной вдоль S, непрерывной при переходе через S, принимающей на S заданные (с точностью до постоянной) значения $Q(t)$ и ведущей себя на бесконечности как $P\log|z|+U_0(x, y)$, где $U_0(x, y)$ — гармоническая функция, исчезающая на бесконечности ($z=x+iy$).

Если функция $U(x, y)$ найдена, то $p(t)$ определяется формулой ([1], стр. 346)

$$p(t)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=+0}=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=-0}. \tag{4}$$

Будем считать, что $Q(t)$ имеет непрерывную производную на S. Следуя методу М. Келдыша и Л. Седова, положим

$$\omega(z)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\prod_{s=1}^{s=n}\frac{(z-a_s)}{(z-b_s)}}\cdot\sum_{k=1}^{k=n}\int_{a_k}^{b_k}\frac{Q'(t)\sqrt{\frac{b_k-t}{t-a_k}\prod\limits_{s\neq k}\frac{(t-b_s)}{(t-a_s)}}}{t-z}\,dt+$$
$$+\frac{C_0+C_1z+\ldots+C_{n-1}z^{n-1}}{\sqrt{\prod\limits_{s=1}^{s=n}(z-a_s)(z-b_s)}}, \tag{5}$$

где $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ — пока неопределенные **действительные** постоянные, а ветви радикалов подбираются так, чтобы $\sqrt{\prod\frac{(z-a_s)}{(z-b_s)}}$ и $\frac{z^n}{\sqrt{\prod(z-a_s)(z-b_s)}}$ принимали на бесконечности значение $+1$ (значение радикала под знаком интеграла берется положительным).

Положим

$$F(z)=\int_0^z\omega(z)\,dz+C,$$

где C — произвольная постоянная, и придадим постоянной C_{n-1} в формуле (5) значение

$$C_{n-1}=P+\sum_{k=1}^{k=n}\int_{a_k}^{b_k}Q'(t)\sqrt{\frac{b_k-t}{t-a_k}\prod_{s\neq k}\frac{(t-b_s)}{(t-a_s)}}\,dt. \tag{6}$$

Функция $U=\Re F(z)$, как нетрудно проверить, будет удовлетворять всем поставленным условиям, с той разницей, что ее значения на участках (1) будут совпадать с заданными значениями $Q(t)$ лишь с точностью до постоянных, могущих быть различными на различных участках.

Для того чтобы все эти постоянные были одинаковы, как это требуется условием задачи, следует надлежащим образом подобрать постоянные C_j ($j=0, 1, \ldots, n-2$) формулы (5). А именно, достаточно положить

$$\Re\left\{\int_0^{a_k}\omega(t)\,dt\right\}+\alpha=Q(a_k)\quad(k=1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

где α — некоторая действительная постоянная. Условия (6) и (7) вполне определяют постоянные $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ и α.

Давление $p(t)$ дается, на основании (4), формулой

$$p(t) = \frac{1}{\pi} \Re [i\omega(t)]_{y=+0}. \tag{8}$$

В частности, если профили — прямолинейные отрезки, параллельные оси Ox, то $Q'(t) = 0$ и давление $p(t)$ определяются без всякого интегрирования, если не считать определенных интегралов, служащих для определения постоянных C_k согласно формуле (7).

Совершенно аналогично решается задача, когда профили не связаны между собой, но заданы силы, прижимающие к границе каждый из них в отдельности. В этом случае изменяются лишь условия (7).

§ 2. Рассмотрим в качестве примера случай, когда $n = 2$ и профили — равные прямолинейные отрезки (a, b) и $(-a, -b)$, причем отрезок (a, b) расположен на высоте h относительно отрезка $(-a, -b)$. Тогда можно взять

$$Q(t) = h \text{ на } (a, b), \quad Q(t) = 0 \text{ на } (-a, -b),$$
$$0 < a < b.$$

В этом случае $Q'(t) = 0$, и по формулам (5), (6), (8)

$$\omega(z) = \frac{C_0 + Pz}{i\sqrt{(z^2 - a^2)(b^2 - z^2)}},$$

$$p(t) = \frac{C_0 + Pt}{\pm\pi\sqrt{(t^2 - a^2)(b^2 - t^2)}} \quad (+ \text{ на правом участке}, \quad - \text{ на левом}).$$

Постоянная C_0 определяется из условий (7), которые, как легко можно видеть, дают

$$C_0 = -\frac{bh}{2K},$$

где

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}, \qquad k^2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

В частности, если профили находятся на одной высоте, $C_0 = 0$.

Батумский учительский институт

Поступило
29 III 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости (1935). [2] М. Келдыш и Л. Седов, ДАН, XVI, № 1 (1937).