Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 9

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Д. И. ШЕРМАН

К РЕШЕНИЮ ПЛОСКОЙ СТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ ЗАДАННЫХ НА ГРАНИЦЕ СМЕЩЕНИЯХ

(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 14 IV 1940)

В настоящее время имеется несколько работ, принадлежащих различным авторам и посвященных решению основных задач теории упругости. Смешанная же задача теории упругости, насколько нам известно, до сих пор еще не решена для общего случая многосвязной области*. Сделанная нами попытка получить решение этой задачи, опираясь на существующие методы решения основных задач, не увенчалась успехом. Поэтому мы указываем новый метод решения основных задач, который, как читатель в дальнейшем увидит, приведет нас к цели и позволит без труда решить интересующую нас смешанную задачу.

Пусть упругая среда заполняет некоторую лежащую в плоскости $z=x+iy$ многосвязную область S. Для определенности область S будем считать конечной. Ее полную границу обозначим через L и предположим, что она состоит из совокупности $\overline{m+1}$ замкнутых кривых $L_j\,(j=1, \ldots, m+1)$; из них L_{m+1} будем считать внешней границей, заключающей внутри себя все остальные $L_j\,(j=1, \ldots, m)$. Односвязные области, внешние к S, ограниченные кривыми L_j, условимся обозначать через $S_j\,(j=1, \ldots, m+1)$. Наконец, координаты точек L будем считать четыре раза дифференцируемыми по дуге s.

Напомним формулировку основных задач теории упругости.

I задача. Определить деформацию и напряжения в области S по заданным смещениям на границе L.

II задача. Определить деформацию и напряжения в области S по заданным внешним силам, действующим на границе L.

В настоящей статье мы будем заниматься решением первой задачи. Как известно, она сводится к определению двух аналитических в области S функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, удовлетворяющих на границе L условиям [2]:

$$\varkappa\varphi(t)-t\overline{\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)}=f(t), \tag{1}$$

где $f(t)$ — известная функция, равная $2\mu(g_1+ig_2)$, причем g_1 и g_2 — компоненты вектора смещения, μ — модуль сдвига, t — аффикс точек L. Функцию $f(t)$ будем считать удовлетворяющей условию Гельдера.

* Решение смешанной задачи для односвязной области дано нами в статье [1].

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ имеют вид:

$$
\left.
\begin{aligned}
\varphi(z) &= -\frac{1}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{1}^{m}(X_j+iY_j)\lg(z-z_j)+\varphi^*(z),\\
\psi(z) &= \frac{\varkappa}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{1}^{m}(X_j-iY_j)\lg(z-z_j)+\psi^*(z),
\end{aligned}
\right\} \tag{2}
$$

где $\varphi^*(z)$ и $\psi^*(z)$ уже регулярны в области S, X_j и Y_j суть подлежащие определению компоненты главного вектора внешних сил, действующих на кривой L_j, z_j — произвольно фиксированные точки в областях S_j, $\varkappa$ — упругая постоянная.

Искомые функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ будем искать в следующем виде:

$$
\left.
\begin{aligned}
\varphi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)}{t-z}\,dt+\sum_{1}^{m}A_j\lg(z-z_j),\\
\psi(z) &= -\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(t)}}{t-z}\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{t}\,\omega(t)}{(t-z)^2}\,dt+\\
&\quad+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)}{t-z}\,\overline{dt}+\sum_{1}^{m}B_j\lg(z-z_j),
\end{aligned}
\right\} \tag{3}
$$

где $\omega(t)$ — неизвестная функция, z — произвольная точка области S, а A_j, B_j — функционалы, соответственно равные

$$
A_j=\int_{L_j}\omega(t)\,ds,\quad B_j=-\varkappa\int_{L_j}\overline{\omega(t)}\,ds\ (j=1,\ \ldots,\ m). \tag{4}
$$

Смещения, соответствующие указанному выбору функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, будут, очевидно, однозначными в области S.

Перейдем в равенствах (3) к пределу, устремляя z к точке t_0 кривой L, и подставим полученные выражения для функций $\varphi(t_0)$ и $\psi(t_0)$ в равенство (1). Получим следующее интегральное уравнение для определения функции $\omega(t)$:

$$
\begin{aligned}
\varkappa\omega(t_0)-\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L \omega(t)\,d\lg\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\omega(t)}\,d\,\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0}+\sum_{1}^{m}\varkappa\{\lg(t_0-z_j)+\\
+\overline{\lg(t_0-z_j)}\}\int_{L_j}\omega(t)\,ds=f(t_0)\ \text{на}\ L.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Докажем, что это уравнение всегда разрешимо. Действительно, пусть соответствующее (5) однородное уравнение имеет некоторое решение $\omega_0(t)$. Тогда функции $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$, определяемые через $\omega_0(t)$ посредством формул (3), очевидно, будут удовлетворять следующему условию на L:

$$
\varkappa\varphi_0(t)-t\overline{\varphi_0'(t)}-\overline{\psi_0(t)}=0.
$$

Отсюда следует, что аналитические в S функции $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ дают решение задачи теории упругости при нулевых смещениях на границе. По теореме единственности везде в области S:

$$
\varphi_0(z)=C,\ \psi_0(z)=\varkappa\bar{C},
$$

где C — некоторая постоянная.

Учитывая далее вид функций $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, получим (после обхода каждой из кривых L_j):

$$A^j_{(0)} = B^{(0)}_j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m), \tag{6}$$

где $A^{(0)}_j$, $B^j{}_{(0)}$ получены из A_j, B_j заменой в последних $\omega(t)$ на $\omega_0(t)$ и

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega_0(t)}{t-z}\,dt = C, \tag{7}$$

$$-\frac{\varkappa}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{\omega_0(t)}}{t-z}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\bar t\omega_0(t)}{(t-z)^2}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega_0(t)}{t-z}\,\overline{dt} = \varkappa\overline{C} \tag{8}$$

в области S.

Последнее равенство может быть преобразовано к форме:

$$-\frac{\varkappa}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{\omega_0(t)}}{t-z}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\bar t\omega_0'(t)}{t-z}\,dt = \varkappa\overline{C}. \tag{9}$$

Введем обозначения

$$i\delta(t) = \omega_0(t) - C, \quad -i\chi(t) = \varkappa\overline{\omega_0(t)} + \bar t\omega_0'(t) + \varkappa\overline{C}. \tag{10}$$

Как нетрудно заметить, функции $\delta(z)$ и $\chi(z)$ регулярны в каждой из областей $S_j\,(j = 1, \ldots, m+1)$ и равны нулю на бесконечности.

Исключая $\omega_0(t)$ из последних уравнений, найдем:

$$\varkappa\overline{\delta(t)} - \bar t\delta'(t) - \chi(t) = -2i\varkappa\overline{C} \ \text{ на } L.$$

Рассматривая полученное уравнение на каждой из кривых L_j, будем иметь на основании той же теоремы единственности:

$$\delta(z) = C^{(0)}_j, \ \chi(z) = \varkappa\overline{C^{(0)}_j} \ \text{ в области } S_j \quad (j = 1, \ldots, m+1),$$

где $C^{(0)}_j$ — некоторые постоянные и $C = C^{(0)}_{m+1} = 0$ (в силу условий на бесконечности). Тогда

$$\omega_0(t) = iC^{(0)}_j \ \text{ на } L_j \quad (j = 1, \ldots, m+1).$$

Наконец, обращаясь к равенствам (6), сразу получим:

$$\omega_0(t) = 0 \quad \text{на} \quad L.$$

Отсюда следует, что уравнение (5) всегда разрешимо. Определив из него $\omega(t)$, найдем по формуле (3) искомые функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$.

Как следует из изложенного выше, главный вектор $X_j + iY_j$ внешних сил, действующих на L_j, равен $-2\pi(1+\varkappa)A_j$ и определяется непосредственно после решения уравнения (5). В этом смысле указанное решение выгодно отличается от предложенного нами раньше решения ([3]) той же задачи, где (после решения интегрального уравнения) для определения X_j, $Y_j\,(j = 1, \ldots, m)$ нужно было дополнительно составлять довольно сложную систему линейных алгебраических уравнений.

Если область S — односвязная, то A_j и $B_j\,(j = 1, \ldots, m)$ следует положить равными нулю. В этом случае, отделяя в уравнении (5) вещественные и мнимые части, получим систему двух вещественных интегральных уравнений, тождественно совпадающую с (рассматриваемой на плоскости) системой Lauricella ([4]). Последний впервые дал наиболее простое решение первой основной задачи теории упругости для пространственной области, ограниченной одной замкнутой поверхностью.

Сейсмологический институт
Академии Наук СССР

Поступило
17 IV 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. И. Шерман, Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР, № 88 (1938). [2] Г. В. Колосов, Применение комплексной переменной к теории упругости (1935); Н. И. Мусхелишвили, Некоторые задачи теории упругости (1935). [3] Д. И. Шерман, Тр. Тбил. матем. ин-та II (1937). [4] G. Lauricella, Il Nuovo Cimento, Serie V, XIII (1907).