Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 9

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Д. И. ШЕРМАН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 2 IV 1940)

1° Пусть упругая среда заполняет некоторую лежащую в плоскости $z=x+iy$ конечную многосвязную область S с границей L, состоящей из совокупности $m+1$ простых замкнутых кривых $L_1, \ldots, L_{m+1}$. В свою очередь область S пусть состоит из суммы областей $S=S_0+ +S_1+\ldots+S_k$, так что S_0 сопряжена с каждой из остальных S_n $(n=1, \ldots, k)$ посредством прессовки или посадки в горячем состоянии. Упругие свойства всех S_n $(n=0, 1, \ldots, k)$ будем считать одинаковыми. Кроме того, для простоты предположим, что области S_n $(n=1, \ldots, k)$ односвязные; ограничивающие их кривые обозначим γ_n $(n=1, \ldots, k)$. При этом область S_0 будет многосвязной, ограниченной совокупностью кривых L_j и γ_n $(j=1, \ldots, m+1;\ n=1, \ldots, k)$. Наконец, будем считать известными внешние силы, действующие на L_j, и скачок смещений на γ_n (при переходе из области S_n в S_0).

Конструкции, состоящие из сопряженных указанным образом механических деталей, часто встречаются в практике машиностроения. Изучение возникающих в них напряжений и деформаций имеет большое значение.

Задача в этом случае([1]) сводится к определению функций $\varphi_n(z)$, $\psi_n(z)$, регулярных в областях S_n $(n=0, 1, \ldots, k)$, из следующих предельных условий*:

$$\left.\begin{array}{c}\overline{\varphi_0(t)}+\bar{t}\varphi_0'(t)+\psi_0(t)=f(t)+C_j \\ \text{на } L_j\ (j=1, \ldots, m+1),\end{array}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{c}\overline{\varphi_0(t)}+\bar{t}\varphi_0'(t)+\psi_0(t)=\overline{\varphi_n(t)}+\bar{t}\varphi_n'(t)+\psi_n(t), \\ \varkappa\overline{\varphi_0(t)}-\bar{t}\varphi_0'(t)-\psi_0(t)=\varkappa\overline{\varphi_n(t)}-\bar{t}\varphi_n'(t)-\psi_n(t)+\overline{g_n(t)} \\ \text{на } \gamma_n\ (n=1, \ldots, k).\end{array}\right\} \tag{2}$$

Здесь функция $f(t)$ определяется по заданным внешним силам, функция $\overline{g_n(t)}$ также известна и равна $2\mu(u_n-iv_n)$, где u_n+iv_n — скачок вектора смещения на кривой γ_n, μ — модуль сдвига, $\varkappa$ — упругая постоянная, C_j — некоторые постоянные, одну из них, например, C_{m+1},

* Некоторые важные частные задачи были решены Н. Д. Тарабасовым—бывш. аспирантом Краснознаменного Московского механико-машиностроительного института им. Баумана.

можно считать равной нулю, остальные C_j $(j=1, \ldots, m)$ подлежат определению, t — аффикс точек L_j и γ_n.

Рассматривая уравнения (2) и с ними сопряженные, легко найдем:

$$\left.\begin{array}{c}\varphi_0(t)=\varphi_n(t)+\dfrac{g_n(t)}{1+\varkappa}, \quad \psi_0(t)=\psi_n(t)+h_n(t) \\ \text{на } \gamma_n \ (n=1, \ldots, k),\end{array}\right\} \tag{3}$$

где

$$h_n(t)=-\frac{1}{1+\varkappa}\{\overline{g_n(t)}+\bar{t}g_n'(t)\}. \tag{4}$$

Равенства (3) можно записать также следующим образом:

$$\varphi_0(t)-\lim_{z_0\to t}\frac{1}{2\pi i(1+\varkappa)}\int_{\gamma_n}\frac{g_n(t_1)}{t_1-z_0}dt_1=\varphi_n(t)-\lim_{z_n\to t}\frac{1}{2\pi i(1+\varkappa)}\int_{\gamma_n}\frac{g_n(t_1)}{t_1-z_n}dt_1,$$

$$\psi_0(t)-\lim_{z_0\to t}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{h_n(t_1)}{t_1-z_0}dt_1=\psi_n(t)-\lim_{z_n\to t}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{h_n(t_1)}{t_1-z_n}dt_1 \quad (n=1, \ldots, k), \tag{5}$$

где точки z_0 и z_n принадлежат (соответственно) области S_0 и S_n, а обход γ_n происходит в отрицательном направлении относительно S_n.

Как показывают последние равенства, регулярные в области S_0, функции

$$\varphi_0(z_0)-\frac{1}{2\pi i(1+\varkappa)}\int_{\gamma_n}\frac{g_n(t)}{t-z_0}dt, \quad \psi_0(z_0)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{h_n(t)}{t-z_0}dt$$

аналитически продолжимы также в область S_n.

Введем теперь в области S_0 новые функции:

$$\left.\begin{array}{c}\varphi(z)=\varphi_0(z)-\displaystyle\sum_1^k\frac{1}{2\pi i(1+\varkappa)}\int_{\gamma_n}\frac{g_n(t)}{t-z}dt, \\ \psi(z)=\psi_0(z)-\displaystyle\sum_1^k\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{h_n(t)}{t-z}dt.\end{array}\right\} \tag{6}$$

Очевидно, функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитически продолжимы в каждую из областей S_n $(n=1, \ldots, k)$ и, следовательно, являются регулярными во всей области S.

Подставляя в уравнение (1) вместо функций $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ их выражения через $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, будем иметь:

$$\left.\begin{array}{c}\overline{\varphi(t)}+\bar{t}\varphi'(t)+\psi(t)=F(t)+C_j \\ \text{на } L_j \ (j=1, \ldots, m+1),\end{array}\right\} \tag{7}$$

где

$$F(t)=f(t)+\sum_1^k\left[-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{h_n(t_1)}{t_1-t}\cdot dt_1+\frac{1}{2\pi i(1+\varkappa)}\int_{\gamma_n}\frac{\overline{g_n(t_1)}}{\bar{t}_1-\bar{t}}d\bar{t}_1-\right.$$

$$\left.-\frac{\bar{t}}{2\pi i(1+\varkappa)}\int_{\gamma_n}\frac{g_n(t_1)}{(t_1-t)^2}dt_1\right]. \tag{8}$$

Как известно, для определения функции $\varphi(z)$ (регулярной в S) может быть построено интегральное уравнение Фредгольма. Оно будет разрешимо лишь в том случае, если

$$R\int_L F(t)\,dt=0, \tag{9}$$

где R — символ вещественной части рядом стоящего выражения.

Имеем:

$$\int_L F(t)\,dt=\int_L f(t)\,dt-\sum_1^k \frac{1}{1+\varkappa}\int_{\gamma_n}\left\{\overline{g_n(t)}\,dt-g_n(t)\,\overline{dt}\right\}+$$

$$+\sum_1^k \frac{1}{2\pi i\,(1+\varkappa)}\int_L\left[\left(\int_{\gamma_n}\frac{\overline{g_n(t)}}{\bar t-\bar t_0}\,\overline{dt}\right)dt_0+\left(\int_{\gamma_n}\frac{g_n(t)}{t-t_0}\,dt\right)\overline{dt}_0\right]. \qquad (10)$$

В рассматриваемом нами случае конечной области S главный момент действующих на границе L внешних сил должен быть равен нулю. Поэтому

$$R\int_L f(t)\,dt=0. \qquad (11)$$

Остальные слагаемые, содержащиеся в правой части равенства (10), суть также чисто мнимые величины. Отсюда следует справедливость равенства (9).

Определив функцию $\varphi(z)$ из построенного для нее интегрального уравнения, легко найдем функцию $\psi(z)$. После этого, возвращаясь вновь к равенствам (6) и (3), последовательно найдем искомые функции $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ и $\varphi_n(z)$, $\psi_n(z)$ $(n=1,\ldots,k)$.

Если область S — односвязная и функция $z=\omega(\zeta)$, отображающая на нее лежащий в плоскости ζ круг, — рациональная, то выражения для искомых функций могут быть получены в конечном виде через интегралы типа Коши.

Отметим, что в отличие от общего случая, при котором упругие свойства сред S_n различны ([1]), указанное решение остается справедливым и тогда, когда кривые γ_n $(n=1,\ldots,k)$ имеют общие дуги или точки касания как между собою, так и с кривыми L_j $(j=1,\ldots,m+1)$.

2° Рассмотрим теперь тот случай, когда модули сдвига областей S_n $(n=0,1,\ldots k)$ равны между собою, но коэффициенты $\varkappa$ различны. При этом второе из уравнений (2) заменится следующим:

$$\varkappa_0\overline{\varphi_0(t)}-\bar t\varphi_0'(t)-\psi_0(t)=\varkappa_n\overline{\varphi_n(t)}-\bar t\varphi_n'(t)-\psi_n(t)+\overline{g_n(t)}\ (n=1,\ldots,k). \quad (12)$$

Складывая первое из уравнений (2) с уравнением (12), получим:

$$(1+\varkappa_0)\,\varphi_0(t)+a_n^{(e)}(t)=(1+\varkappa_n)\,\varphi_n(t)+a_n^{(i)}(t)\quad (n=1,\ldots,k), \qquad (13)$$

где $a_n^{(i)}(t)$ и $a_n^{(e)}(t)$ суть предельные значения $-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{g_n(t)}{t-z}\,dt$, соответственно, изнутри и извне γ_n.

Введем новую функцию $\varphi(z)$, регулярную в области S и определяемую в области S_0 равенством:

$$\varphi(z)=(1+\varkappa_0)\,\varphi_0(z)+\sum_1^k a_n^{(e)}(z). \qquad (14)$$

Обозначим далее через $b_n^{(i)}(t)$ и $b_n^{(e)}(t)$ предельные значения $-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{\bar t}{t-z}\,dt$ изнутри и извне γ_n. Тогда из равенств (12), (13) и (14) без труда получим:

$$\frac{\varkappa_n-\varkappa_0}{(1+\varkappa_n)(1+\varkappa_0)}\left\{\overline{\varphi(t)}-b_n^{(e)}(t)\,\varphi'(t)\right\}+\psi_0(t)=$$

$$=-\frac{\varkappa_n-\varkappa_0}{1+\varkappa_0}\,b_n^{(i)}(t)\,\varphi_n'(t)+\psi_n(t)+q_n(t)\quad (n=1,\ldots,k), \qquad (15)$$

где $q_n(t)$ — некоторая известная функция.

Наконец, введем еще функцию

$$\psi(t)=(1+\varkappa_0)\psi_0(t)+$$

$$+\sum_1^k\left[\frac{\varkappa_n-\varkappa_0}{(1+\varkappa_n)}\{\omega_n^{(e)}(t)-b_n^{(e)}(t)\varphi'(t)\}+\delta_n^{(e)}(t)\right], \tag{16}$$

где $\omega_n^{(e)}(t)$ и $\delta_n^{(e)}(t)$ суть предельные значения функций

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n}\frac{\overline{\varphi(t)}}{t-z}dt,\quad -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n}\frac{q_n(t)}{t-z}dt$$

при z, стремящемся к γ_n извне S_n.

Функция $\psi(z)$ будет регулярна везде в области S.

Учитывая еще очевидное соотношение

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n}\frac{\overline{\varphi(t)}}{t-z}dt=\int\limits_L\overline{\varphi(t)}K_n(\bar{t},z)\overline{dt}, \tag{17}$$

где функция $K_n(\bar{t},z)$ регулярна вне γ_n и равна

$$K_n(\bar{t},z)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\gamma_n}\frac{dt_1}{(t_1-z)(\bar{t}-\bar{t}_1)},$$

и полагая, кроме того,

$$-\sum_1^k\frac{\varkappa_n-\varkappa_0}{1+\varkappa_n}K_n(\bar{t},z)=K(\bar{t},z),$$

$$\bar{t}+\sum_1^k\frac{\varkappa_n-\varkappa_0}{1+\varkappa_n}b_n^{(e)}(t)=b(t),$$

преобразуем равенство (1) к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned}\overline{\varphi(t)}+b(t)\varphi'(t)+\int\limits_L\overline{\varphi(t)}K(\bar{t},z)\overline{dt}+\psi(t)=F(t)+C_j\\ \text{на } L_j\ (j=1,\ldots,m+1);\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

здесь $F(t)$ — известная функция, значение которой может быть легко выписано.

Действуя обычным образом (1), построим для определения функции $\varphi(z)$ интегральное уравнение Фредгольма и докажем его разрешимость. Зная $\varphi(z)$, найдем $\psi(z)$, а затем и все остальные функции $\varphi_n(z)$, $\psi_n(z)$ $(n=0,1,\ldots,k)$.

Этим исчерпывается решение задачи.

Сейсмологический институт
Академии Наук СССР
Москва

Поступило
17 IV 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. И. Шерман, Тр. сейсмол. ин-та Академии Наук, № 86 (1938).