Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 9

МАТЕМАТИКА

М. В. БЕБУТОВ

О ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 29 IV 1940)

Динамической системой в топологическом пространстве R мы называем непрерывную однопараметрическую группу непрерывных и взаимно однозначных преобразований R в самого себя. Каждая динамическая система M в пространстве R задается при помощи функции $f(p, t)$, определенной для $p \in R, -\infty < t < +\infty$, со значениями из R, которая удовлетворяет условиям:

1) $f(p, 0)=p$,
2) $f[f(p, t_1), t_2]=f(p, t_1+t_2)$,
3) $f(p, t)$ является непрерывной функцией совокупности переменных (p, t).

Если A — подмножество R и E — множество действительных чисел, то мы обозначим через $f(A, E)$ множество

$$\underset{t\in E}{\mathfrak{S}}\ \underset{p\in A}{\mathfrak{S}}\ f(p, t).$$

В частности множество $f(p, I)$, где $I=(-\infty, +\infty)$ мы назовем траекторией; $f(p, t)$, рассматриваемую как функцию t, при фиксированном p мы будем называть движением.

Множество A называется инвариантным, если

$$f(A, I)=A.$$

Мы скажем, что p является точкой покоя, если для любого t

$$f(p, t)=p.$$

Пусть, далее, R_u есть пространство непрерывных действительных функций $\varphi(x)$ действительного переменного x, $-\infty < x < +\infty$, где расстояние между функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определено формулой

$$\rho[\varphi, \psi]=\sup_{A>0} \min\left[\sup_{|x|\leqslant A} |\varphi(x)-\psi(x)|, \frac{1}{A}\right].$$

Это определение расстояния означает, что условие $\lim\limits_{n\to\infty} \rho[\varphi_n, \varphi]=0$ эквивалентно равномерной сходимости $\varphi_n(x)$ к $\varphi(x)$ на каждом конечном интервале.

Определим в R_u группу преобразований $f_0[\varphi(x), t]$, положив

$$f_0[\varphi(x), t] = \varphi(x+t) = \varphi_t(x).$$

Легко установить, что эта группа преобразований удовлетворяет условиям 1), 2), 3), сформулированным выше, и, следовательно, определяет в R_u динамическую систему, которую мы обозначим M_u. Если дана произвольная динамическая система M в топологическом пространстве R, то каждая непрерывная действительная функция $\Phi(p)$, определенная в R, индуцирует однозначное и непрерывное отображение M в M_u, т. е. такое однозначное и непрерывное отображение Ψ пространства R в R_u, при котором

$$\Psi[f(p, t)] = f_0[\Psi(p), t].$$

В самом деле, каждой точке $p \in R$ можно поставить в соответствие действительную функцию $\varphi_p(x) = \Phi[f(p, x)]$ действительного переменного x, $-\infty < x < +\infty$.

В силу непрерывности $\Phi(p)$ и свойств динамической системы $\varphi_p(x)$ является непрерывной функцией x, следовательно, мы получаем однозначное отображение R в R_u.

Легко показать, что это отображение Ψ будет непрерывным и что оно будет удовлетворять соотношению

$$\Psi[f(p, t)] = f_0[\Psi(p), t].$$

Следовательно, $\Phi(p)$ определяет однозначное и непрерывное отображение M в M_u. Если при этом соответствие между R и $\Psi(R) \subset R_u$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно, то будем говорить, что M отображается в M_u взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

Частичный ответ на вопрос о том, когда такое отображение M в M_u возможно, дает теорема 1.

Теорема 1. *Если пространство динамической системы M является метрическим и компактным, а M имеет не более одной точки покоя, то существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение M в M_u.*

Чтобы избавиться от условия существования не более чем одной точки покоя в данной динамической системе, мы воспользуемся следующим обстоятельством:

Теорема 2. *Если пространство R динамической системы M является локально-компактным пространством Hausdorff'а со второй аксиомой счетности, то M можно непрерывно отобразить в динамическую систему M^*, расположенную в компактном метрическом пространстве и обладающую единственной точкой покоя. Это преобразование будет топологическим на множестве R_1 всех точек, не являющихся точками покоя M.*

Из теорем 1 и 2 следует обобщение теоремы 1.

Теорема 3. *Всякую динамическую систему M, расположенную в локально-компактном пространстве Hausdorff'а со второй аксиомой счетности, можно непрерывно отобразить в динамическую систему M_u таким образом, что это отображение будет взаимно однозначным и взаимно непрерывным во всякой точке p, не являющейся точкой покоя M.*

Пусть дана функция $\varphi(x) \in R_u$; легко установить условия, которым должна удовлетворять функция $\varphi(x)$ для того, чтобы движение $f_0[\varphi, t]$ было устойчиво по Лагранжу, устойчиво по Пуассону, рекуррентно и т. д. В частности, отметим, что $f_0[\varphi, t]$ является почти периодической траекторией тогда и только тогда, когда функция $\varphi(x)$ является почти периодической в смысле H. Bohr'а. H. Bohr (1) ввел определение псевдопериодической функции — это непрерывная функция $\varphi(x)$ такая, что для всякой пары чисел $\varepsilon > 0$ и $x_0 > 0$ существует число $x_1 > x_0$, удовлетворяющее соотношению

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} |\varphi(x) - \varphi(x + x_0)| < \varepsilon .$$

Этот класс функций тесно связан с новым типом движений динамических систем, расположенных в метрическом пространстве.

Определение 1. *Движение $f(p, t)$ динамической системы M мы назовем равномерно устойчивым по Пуассону, если для всякой пары чисел $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ существует число $\tau > T$ такое, что*

$$\sup_{-\infty<t<+\infty} \rho[f(p, t), f(p, t+\tau)] < \varepsilon.$$

Легко установить, что всякое движение в M_u, определяемое псевдопериодической функцией, будет равномерно устойчивым по Пуассону, и обратно, каждая точка траектории в M_u, равномерно устойчивой по Пуассону, будет псевдопериодической функцией.

Определение 2. *Замкнутое инвариантное множество F мы назовем псевдоминимальным, если существует в F всюду плотная траектория, равномерно устойчивая по Пуассону.*

Можно доказать следующие теоремы, касающиеся псевдоминимальных множеств.

Теорема 4. *Каждое движение псевдоминимального множества равномерно устойчиво по Пуассону.*

Теорема 5. *Пусть F — компактное псевдоминимальное множество; возможно одно из двух: либо F является минимальным множеством (т. е. всякое замкнутое не пустое инвариантное подмножество F совпадает с F), либо существует континуум замкнутых инвариантных подмножеств F, попарно различных между собою.*

Можно построить примеры псевдоминимальных множеств второго из описанных видов.

Поступило
29 IV 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 H. Bohr, Acta Mathematica, 45 (1925).