Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 9

МАТЕМАТИКА

Г. Е. ШИЛОВ

К ТЕОРИИ ИДЕАЛОВ В НОРМИРОВАННЫХ КОЛЬЦАХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 9 IV 1940)

Мы рассматриваем нормированное кольцо ([1]) R, образованное функциями $x(t)$, заданными на некотором множестве S. При этом предполагается, что:

a) S хаусдорфово и бикомпактно, и функции $x(t)$ непрерывны;

b) кольцевые операции — сложение и умножение — определены естественным образом как сложение и умножение функций;

c) для каждых двух точек $t_1 \neq t_2$ пространства S существует функция $x(t) \in R$ такая, что $x(t_1) \neq x(t_2)$;

d) если $x(t_1) \in R$ не обращается на S в нуль, то $\frac{1}{x(t)} \in R$;

e) если $x(t) \in R$, то и $\overline{x(t)} \in R$;

f) для каждого замкнутого множества $F \subset S$ и точки $t_0 \bar{\in} F$ существует $x(t) \in R$, равная нулю во всех точках F и отличная от нуля в точке t_0.

Согласно общим теоремам теории нормированных колец ([1]) каждое нормированное кольцо R без радикала изоморфно кольцу функций, удовлетворяющему условиям a) — d). Пространство S при этом получается как пространство всех максимальных идеалов кольца R. Обратно, из условий a) — e) легко следует, что S есть пространство всех максимальных идеалов кольца R. (Можно показать, что условий a) — d) для этого недостаточно.)

Примеры колец, удовлетворяющих условиям a) — f).

1. Кольцо $C(S)$ всех непрерывных на S функций с нормой

$$\|x(t)\| \max_{t \in S} |x(t)|.$$

2. Кольцо V всех непрерывных на сегменте $S = [0, 1]$ функций с ограниченным изменением, с нормой $\|x\| = \max |x(t)| + \operatorname{var} x(t)$.

3. Кольцо V_p всех абсолютно непрерывных на $S = [0, 1]$ функций с производной, интегрируемой в p-ой степени, с нормой

$$\|x\| = \max |x(t)| + \sqrt[p]{\int_0^1 |x'(t)|^p \, dt} \qquad (p \geqslant 1).$$

4. Кольцо D_n всех функций на $S=[0, 1]$, обладающих n непрерывными производными, с нормой $\|x\|=\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \max|x^{(k)}(t)|$.

5. Кольцо W всех функций, заданных на окружности $S=\{|t|=1\}$ плоскости комплексного переменного t, разлагающихся в абсолютно сходящийся ряд $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n t^n$, где норма определяется как $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|$.

6. $W_{<\alpha_n}$ всех функций, заданных на окружности $S=\{|t|=1\}$, у которых коэффициенты c_n удовлетворяют условию $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|\alpha_n < \infty$, где α_n — некоторая фиксированная последовательность положительных чисел; при $\alpha_n \equiv 1$ получается кольцо W. Как показал И. М. Гельфанд (2), для выполнения условий a) — e) необходимо и достаточно, чтобы последовательность α_n была такой, что

$$\alpha_{m+n} \leqslant \alpha_m \cdot \alpha_n, \quad \lim_{n\to\pm\infty} \sqrt[n]{\alpha_n}=1.$$

В общем случае необходимого и достаточного условия на последовательность α_n, эквивалентного условию f), не получено; если ограничиться такими последовательностями α_n, для которых $\alpha_{-n}=\alpha_n$ и $\ln\left(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right)^n$ при $n>0$ монотонно и неограниченно возрастает вместе с n, то условием, эквивалентным f), является сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln \alpha_n}{n^2}$. Это легко получается с помощью известной теоремы Мандельбройта (3).

Каждому замкнутому множеству $F \subset S$ соответствует замкнутый идеал $I(F) \subset R$, образованный всеми функциями, равными нулю на F. Из условия f) следует, что различным замкнутым множествам соответствуют различные идеалы $I(F)$. Если все замкнутые идеалы $I \subset R$ являются идеалами типа $I(F)$, то R называется N-кольцом. В общем случае каждому идеалу I соответствует замкнутое множество F, образованное всеми точками S, в которых все функции $x(t) \in I$ одновременно обращаются в нуль; I мы будем называть идеалом, принадлежащим к F. Так как каждый идеал содержится в максимальном (1), то F не пусто; если F содержит только одну точку, то I называется примарным идеалом. Если в кольце R нет иных примарных идеалов, кроме максимальных, то R называется N^*-кольцом. В частности, всякое N-кольцо есть N^*-кольцо; верно ли обратное, неизвестно. Кольца C, V и V_p суть N-кольца (следствие 1 теоремы 3). Кольцо D_n не является N-кольцом. Замкнутый идеал $I \subset D_n$ определяется заданием не одного замкнутого множества, а системы $n+1$ вложенных друг в друга замкнутых множеств (4). В кольце W идеалы исследовал В. А. Диткин (5), который показал, что всякий идеал, множество нулей которого является суммой не более, чем счетного числа сегментов и отдельных точек, есть идеал $I(F)$. Для колец $W_{<\alpha_n>}$ И. М. Гельфанд (2) показал, что при $\lim_{r\to 1}(1-r^2)\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{-n} r^n=0$ и $\lim_{r\to 1}(1-r^2)\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n=0$ $W_{<\alpha_n>}$ является N^*-кольцом.

Лемма. Пусть дан произвольный идеал I, принадлежащий замкнутому множеству $F \subset S$, и пусть замкнутое множество $F_1 \subset S$ не пересекается с F. Тогда существует функция $x(t) \in I$, равная на F_1 единице.

Следствие. Для любых двух замкнутых непересекающихся множеств в R существует функция, равная 0 на одном и 1 на другом множестве.

Теорема 1*. *Пусть определенная на S функция $x(t)$ обладает следующим свойством: для каждой точки $a \in S$ существует функция $x_a(t) \in S$, совпадающая с $x(t)$ в некоторой окрестности точки a.*

Тогда $x(t)$ является элементом кольца R и принадлежит к идеалу, порожденному функциями $x_a(t)$.

Теорема 2. *Среди всех идеалов I, принадлежащих замкнутому F, имеется наименьший идеал $J(F)$. Он образован всеми функциями $x(t) \in R$, множество нулей которых содержит открытое множество, содержащее F. Замыкание идеала $J(F)$ есть наименьший из всех замкнутых идеалов, принадлежащих к F.*

Функции $x(t) \in \overline{J(F)}$ характеризуются следующим условием: существует последовательность функций $x_n(t) \in R$, стремящаяся к нулю по норме, причем каждая из функций $x_n(t)$ совпадает с $x(t)$ в некотором открытом множестве, содержащем F.

Теорема 3. *R тогда и только тогда является N-кольцом, когда для каждой функции $x(t) \in R$ существует последовательность $x_n(t) \in R$, стремящаяся к нулю по норме, причем каждая из функций $x_n(t)$ совпадает с функцией $x(t)$ в некоторой окрестности множества нулей $x(t)$.*

Теорема 3′. *R тогда и только тогда является N^*-кольцом, когда для каждой функции $x(t) \in R$ и точки $a \in S$, в которой $x(t)=0$, существует последовательность $x_n(t) \in R$, стремящаяся к нулю по норме, причем каждая из функций $x_n(t)$ совпадает с $x(t)$ в некоторой окрестности точки a.*

Из теорем 3 и 3′ легко получаются:

Следствие 1. Кольца C, V и V_p суть N-кольца **.

Следствие 2. Если $R_1 \subset R_2$, причем $\overline{R_1} = R_2$ в смысле топологии R_2, и R_1 есть N^*-кольцо, то и R_2 есть N^*-кольцо; в частности $W \supset V_2$ есть N^*-кольцо.

Следствие 3. Каждое N^*-кольцо функций на $S=[0,1]$ содержит функцию, не принадлежащую к D_1, т. е. не имеющую непрерывной производной.

Более сильное утверждение: N^*-кольцо функций на $[0,1]$ содержит всё кольцо D_1 — несправедливо: N^*-кольцо $W_{<|n|^{3/4}+1>}$ уже не содержит некоторую функцию с непрерывной производной.

Следствия 2 и 3 получаются с помощью следующей теоремы И. М. Гельфанда ([1]):

Если $R_1 \subset R_2$, то всякая последовательность функций, сходящаяся в R_1, сходится также и в R_2.

Теорема 4. *Каждый идеал есть пересечение примарных идеалов.*

Теорема 5. *Если замкнутое множество F, которому принадлежит замкнутый идеал I, состоит из конечного числа точек, то I есть пересечение замкнутых примарных идеалов.*

---

* Независимо доказана М. Г. Крейном. Отметим, что минимальными предпосылками для теоремы 1 является выполнение условий a)—b) и следствия из леммы, даже без предположения о нормируемости кольца.

** Ср. ([4]). Для кольца C это—теорема Stone'a ([6]).

Для множеств F более сложной структуры имеет место следующее предложение, которое я формулирую для простоты для случая N^*-кольца:

Теорема 6. *Пусть R есть N^*-кольцо и k-ая производная замкнутого множества F, которому принадлежит замкнутый идеал I, есть пустое множество. Тогда k-ая степень идеала I совпадает с $\overline{J(F)}$.*

Доказательство основано на следующей лемме:

Всякая функция N^*-кольца, равная нулю в замыкании $\overline{G}$ открытого множества G и, кроме того, в точках $a_1, a_2 \ldots, a_k$, есть предел функций $x_n(t)$, каждая из которых равна нулю в области, содержащей G и точки $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Институт математики
Московского государственного университета

Поступило
29 IV 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, ДАН, XXIII, № 5 (1939). [2] И. М. Гельфанд, Теория нормированных колец (диссертация). [3] С. Мандельбройт, Квазианалитические классы функций, стр. 45 (1937). [4] Г. Е. Шилов, Сборник № 18 научных кружков МГУ, стр. 3. [5] В. А. Диткин, Уч. зап. МГУ, **30**, 83 (1939). [6] M. H. Stone, Trans. Amer. Math. Soc., **41**, 375—481 (1937).