Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 1

МАТЕМАТИКА

Я. Л. ШАПИРО

ОБ ОДНОМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ СВОЙСТВЕ МЕТРИКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 5 V 1940)

Пусть на произвольной поверхности даны два векторных поля $\lambda^i_{h|}$; $i, h=1, 2$, h — порядковый номер вектора.

Траектории, соответствующие этим полям, образуют сеть, по отношению к которой векторы $\lambda^i_{h|}$ будем называть характеристическими. Сетью равных путей (термин, предложенный Я. С. Дубновым вместо «Netz ohne Unwege» немецких авторов) будем называть сеть, для которой расстояние, пройденное от одной точки поверхности до другой вдоль кривых сети, не зависит от выбора пути. На всякой поверхности существует бесчисленное множество сетей равных путей (р. п.).

Пусть p^i — компоненты «вектора Пуассона», соответствующего векторам $\lambda^i_{h|}$, т. е. $p^i=\lambda^i_{1|,j}\lambda^j_{2|}-\lambda^i_{2|,j}\lambda^j_{1|}$ ($\lambda^i_{h|,j}$ — ковариантная производная, которую здесь можно заменить обыкновенной).

Обозначим через η^i компоненты какого-либо вектора, делящего пополам угол между $\lambda^i_{1|}$ и $\lambda^i_{2|}$. Тогда, если $g_{ij}\lambda^i_{h|}\lambda^i_{h|}=1$ (g_{ij} — фундаментальный тензор поверхности), то условием, характеризующим сеть р. п., является

$$p^i\eta_i=0. \tag{1}$$

Очевидно, мы можем считать, что

$$\eta_i=\lambda_{1|i}+\lambda_{2|i}.$$

Тогда из (1), принимая во внимание, что

$$\lambda^i_{1|,j}\lambda_{1|i}=\lambda^i_{2|,j}\lambda_{2|i}=0,$$

вытекает

$$\lambda_{1|i,j}\lambda^i_{2|}\lambda^j_{2|}=\lambda_{2|i,j}\lambda^i_{1|}\lambda^j_{1|}, \tag{2}$$

чем, опять таки, характеризуется сеть р. п.

Проф. Я. С. Дубновым было высказано предположение, что существование на поверхности хотя бы одной сети р. п., составленной из геодезических, характеризует ее как поверхность вращения (с точностью до изгибания). Цель настоящей заметки доказать это предположение.

Условие того, чтобы кривые сети были геодезическими, запишем в виде:

$$\lambda^i_{h|,j}\lambda^j_{h|}=0, \qquad h=1, 2. \tag{3}$$

Обозначим через 2ω угол между векторами $\lambda^i_{1|}$, $\lambda^i_{2|}$ и построим вектор μ_i, перпендикулярный к η^i и имеющий длину $\frac{1}{\sin\omega}$. Тогда

$$\lambda^i_{1|}\mu_i = 1; \quad \lambda^i_{2|}\mu_i = -1. \tag{4}$$

Дифференцируя ковариантно, получаем:

$$\mu_{i,j}\lambda^i_{h|} + \mu_i\lambda^i_{h|,j} = 0. \tag{4a}$$

Свертывая с $\lambda^j_{h|}$, имеем вследствие (3):

$$\mu_{i,j}\lambda^i_{h|}\lambda^j_{h|} = 0. \tag{5}$$

Из (4а) следует также

$$\mu_{i,j}\lambda^i_{h|}\lambda^j_{k|} + \mu_i\lambda^i_{h|}\lambda^j_{k|} = 0.$$

Полагая $\mu_i = \alpha(\lambda_{h|i} - \lambda_{k|i})$, где α — некоторый скаляр, получаем:

$$\mu_{i,j}\lambda^i_{h|}\lambda^j_{k|} + \alpha(\lambda^i_{h|,j}\lambda^j_{k|}\lambda_{h|i} - \lambda^i_{h|,j}\lambda^j_{k}\lambda_{k|i}) = 0$$

или

$$\mu_{i,j}\lambda^i_{h|}\lambda^j_{k|} = \alpha\lambda^i_{h|,j}\lambda^j_{k|}\lambda_{k|i}.$$

Таким же образом получим:

$$\mu_{i,j}\lambda^i_{k|}\lambda^j_{h|} = -\alpha\lambda^i_{k|,j}\lambda^j_{h|}\lambda_{h|i}.$$

Складывая последние два равенства и принимая во внимание (2), имеем:

$$(\mu_{i,j} + \mu_{j,i})\lambda^j_{1|}\lambda^j_{2|} = 0.$$

Из (5) и (6) легко вытекает:

$$\mu_{i,j} + \mu_{j,i} = 0.$$

Таким образом, наша поверхность допускает группу движений.

Далее, из очевидного равенства $\lambda^i_{h|}\lambda_{k|i} = \cos 2\omega$ вытекает:

$$\lambda^i_{h|,j}\lambda_{k|j}\lambda^j_{k|} = (\cos 2\omega)_{,j}\lambda^j_{k|}.$$

Отсюда и из (2) следует, что угол ω остается постоянным вдоль траектории вектора μ_i.

Для построения геодезической сети р. п. достаточно из какой-либо точки поверхности провести на ней две геодезических под одним и тем же углом к траектории вектора μ_i, удовлетворяющего уравнению $\mu_{i,j} + \mu_{j,i} = 0$. При движении поверхности, соответствующем вектору, эти две геодезических дадут сеть, которая, как легко убедиться, будет сетью р. п.

Горьковский государственный университет

Поступило
21 IV 1940