Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 1

МАТЕМАТИКА

М. КРЕЙН

О МИНИМАЛЬНОМ РАЗЛОЖЕНИИ ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА НА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 19 IV 1940)

1. Пусть E — некоторое линейное нормированное полное пространство, $\overline{E}$ — сопряженное к нему пространство линейных функционалов ([1]); пусть $K \subset E$ — некоторое множество, обладающее следующими свойствами:

1° Если $x \in K$, то $\lambda x \in K$ при $\lambda \geqslant 0$.

2° Если $x, y \in K$, то $x+y \in K$.

Условимся писать $f_1 < f_2$, или, что то же, $f_2 > f_1$ ($f_1, f_2 \in \overline{E}$), если $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ при $x \in K$. Линейные функционалы $f > \theta$ будем называть положительными.

В нашей предыдущей заметке ([2]) было показано, что любой линейный функционал $f \in \overline{K}$ допускает разложение:

$$f = g - h, \tag{1}$$

где $g \geqslant \theta$, $h \geqslant \theta$, в том и только в том случае, когда множество K — нормальное коническое множество, т. е. кроме свойств 1°, 2° множество K обладает еще следующим свойством:

3° Существует такое число $\delta > 0$, что для любых $x, y \in K$, $|x| = |y| = 1$, выполняется неравенство $|x+y| > \delta$.

Разложение (1) данного функционала f будем называть минимальным, если при всяком ином разложении $f = g' - h'$, $g' \geqslant \theta$, $h' \geqslant \theta$, непременно $g' > g$ и, значит, $h' > h$.

Естественно возникает следующая проблема. Какому необходимому и достаточному условию должно удовлетворять нормальное коническое множество, чтобы любой линейный функционал допускал минимальное разложение?

Мы решаем эту проблему полностью для того случая, когда K есть нормальный конус, т. е. когда множество K удовлетворяет условию 1°, 2°, 3° и еще условию

4° K имеет внутренние точки.

Условимся писать $x < y$ ($x \ll y$), или, что то же, $y > x$ ($y \gg x$), если $x \neq y$ и $x - y \in K$ ($x - y$ — внутренний элемент K). Тогда наш результат может быть формулирован следующим образом:

Теорема. *Пусть K — нормальный конус. Тогда для того, чтобы любой линейный функционал $f \in \overline{E}$ допускал минимальное разложение, необходимо и достаточно, чтобы конус K обладал следующим свойством.*

(R_1) *Из неравенств* $x \ll \frac{u}{v}$, $u \gg \theta$, $v \gg \theta$ *следует существование такого* $y \gg \theta$, *что* $x \ll y \ll \frac{u}{v}$.

Нетрудно убедиться, что свойство (R_1) эквивалентно следующему.

(R_1') *Если для каких-либо трех элементов* $x \gg \theta$, $u \gg \theta$, $v \gg \theta$ *выполняется неравенство* $x \ll u+v$, *то существуют такие* y, z, *что* $x = y+z$, $\theta \ll y \ll u$, $\theta \ll z \ll v$.

Для доказательства теоремы нам придется установить ряд предварительных предложений.

2. Отнесем каждому линейному функционалу $f \in \overline{E}$ функционал $g_f(u)$, определенный для $u \gg \theta$ формулой

$$g_f(u) = \sup_{\theta \ll x \ll u} f(x) \qquad (u \gg \theta). \tag{2}$$

Заметим, что, каково бы ни было разложение f:

$$f = g_1 - h_1, \quad g_1 \geqslant \theta, \quad h_1 \geqslant \theta, \tag{3}$$

всегда

$$g_f(u) \leqslant g_1(u) \text{ при } u \gg \theta. \tag{4}$$

Лемма 1. *Для данного* $u \gg \theta$ *и* $\varepsilon > 0$ *существует разложение* (1), *для которого*

$$g(u) \leqslant g_f(u) + \varepsilon. \tag{5}$$

Доказательство. Выберем положительное $\delta > 0$ и < 1 так, чтобы

$$\sup_{-\delta u \ll x \ll u} f(x) < g_f(u) + \varepsilon. \tag{6}$$

Обозначим через $E^{(2)}$ метрическое произведение E на самого себя [см. Банах ([1]), стр. 182], а через $K^{(2)}$ совокупность тех $Z = (x, y) \subset E^{(2)}$, для которых $x \in K$, $y \in K$.

Нетрудно видеть, что $K^{(2)}$ — нормальный конус в $E^{(2)}$.

Положим $V = (u, \delta u)$ и обозначим через G линейную совокупность всех элементов $Z \in E^{(2)}$ вида $Z = tV - X$, где $-\infty < t < \infty$, $X = (x, -x)$ $(x \in E)$.

В подпространстве $G \subset E^{(2)}$ определим функционал $F(Z)$, полагая

$$F(Z) = [g(u) + \varepsilon]\, t - f(x). \tag{7}$$

Если $Z = tV - X$ внутренний элемент $K^{(2)}$, то $tu - x \gg \theta$, $\delta tu + x \gg \theta$ или $-\delta tu \ll x \ll tu$; следовательно, $t > 0$ и, в силу (6), $f(x) < t\,[g(u) + \varepsilon]$, т. е. $F(Z) > 0$.

Но тогда функционал $F(Z)$ $(Z \in G)$ можно распространить на все пространство $E^{(2)}$ так, чтобы он сохранил аддитивность, положительность $[F(Z) > 0$ при $Z \gg \theta]$, а, следовательно, и линейность (см. сборник работ Ахиезера-Крейна, стр. 154).

Положим затем

$$g(x) = F(X') \text{ и } h(x) = F(X''), \tag{8}$$

где $X' = (x, \theta)$, $X'' = (\theta, x)$ $(x \in E)$. Очевидно, функционалы g и h — линейные положительные функционалы и, кроме того, $f(x) = F(X) = F(X') - F(X'') = g(x) - h(x)$.

Замечая, далее, что, согласно (8) и (7), $F(V) = g(u) + \delta h(u) = g_f(u) + \varepsilon$, мы приходим к (5).

3. Лемма 2. *Для того чтобы линейный функционал f допускал минимальное разложение, необходимо и достаточно, чтобы функционал $g_f(u)$ был аддитивным:*

$$g_f(u+v) = g_f(u) + g_f(v) \qquad (u \gg \theta,\ v \gg \theta). \tag{9}$$

Доказательство. Припоминая, что (3) влечет (4) и, с другой стороны, лемму 1, мы заключаем, что если $f=g-h$ — минимальное разложение некоторого функционала $f \in \overline{E}$, то $g_f(u)=g(u)$ при $u \gg \theta$. Откуда следует необходимость условия (9).

Для доказательства достаточности этого условия заметим, что любой элемент x допускает представление $x=u_x-v_x$, где $u_x \gg \theta$, $v_x \gg \theta$.

В силу (8) равенство $g(x)=g_f(u_x)-g_f(v_x)$ однозначно определяет некоторый аддитивный функционал $g(x)$. Так как, кроме того, $g(x) \geqslant 0$ при $x \gg \theta$, то $g(x)$ является линейным функционалом [см. ([3]), стр. 154]. Положим $h=g-f$, тогда $h(u)=g(u)-f(u)=g_f(u)-f(u) \geqslant 0$ при $u \gg \theta$. Откуда $h \gg \theta$. Так как (3) влечет (4), то мы заключаем, что построенное разложение $f=g-h$ является минимальным.

4. Доказательство необходимости условий теоремы. Для любого $u \gg \theta$ обозначим через $Q(u)$ множество тех x, для которых $\theta \ll x \ll u$. Тогда условие (R_1) выражает то, что при любых $u \gg \theta$ и $v \gg \theta$

$$Q_{u+v}=Q_u+Q_v; \tag{10}$$

при этом Q_u+Q_v обозначает совокупность всевозможных $z=x+y$, где $x \in Q_u$, $y \in Q_v$.

Очевидно, что всегда $Q_u+Q_v \subset Q_{u+v}$. Легко также видеть, что множества Q_u, Q_v, Q_{u+v}, Q_u+Q_v суть выпуклые, открытые и ограниченные множества (последнее в силу того, что K — нормальный конус).

Допустим, что при некоторых $u \gg \theta$ и $v \gg \theta$ не выполняется (10). Тогда найдется такой элемент $x_0 \in Q_{u+v}$, который будет лежать вне замыкания множества Q_u+Q_v, а, следовательно, по теореме Ascoli-Mazur'а [см. ([4]), стр. 74], найдется такой функционал $f_0 \in \overline{E}$, что

$$\sup_{x \in Q_u+Q_v} f_0(x) < f_0(x_0) \leqslant \sup_{x \in Q_{u+v}} f_0(x).$$

Но, припоминая определение (2) функционала g_f, мы видим, что последнее неравенство означает не что иное, как $g_{f_0}(u)+g_{f_0}(v) < g_{f_0}(u+v)$. Откуда по лемме 2 функционал f_0 не допускает минимального разложения.

5. Доказательство достаточности условий теоремы. Пусть $\mathfrak{M} \subset \overline{E}$ — некоторое конечное или бесконечное множество линейных функционалов, имеющее мажоранту, т. е. для которого существует такой элемент $g_0 \in \overline{E}$, что $f \leqslant g_0$ при $f \in \mathfrak{M}$. Если среди мажорант $\mathfrak{M}$ имеется наименьшая мажоранта, то мы будем называть ее верхней гранью множества $\mathfrak{M}$ и обозначать через $\sup \mathfrak{M}$. Очевидно, что $f=g-h$ есть минимальное разложение данного функционала $f \in \overline{E}$ тогда и только тогда, когда $g=\sup(f, \theta)$.

Из результатов F. Riesz'а вытекает, что при выполнении условия (R_1'):

A) *Каждое множество* $\mathfrak{M} \subset E$, *имеющее некоторую мажоранту* g_0, *имеет верхнюю грань.*

Действительно, положим для $x \gg \theta$

$$g(x)=\sup\{f_1(x_1)+f_2(x_2)+\ldots+f_m(x_m)\}, \tag{11}$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_m$ $(m=1, 2, \ldots)$ — произвольные элементы из $\mathfrak{M}$, а $x=x_1+x_2+\ldots+x_m$ — произвольное разложение элемента x на составляющие $x_i \gg \theta$ $(i=1, 2, \ldots, m)$; как показал F. Riesz ([5],[6]) [см. также Л. В. Канторович ([7])], из свойства (R_1') вытекает, что функционал $g(x)$ является аддитивным функционалом. Полагая для любых $x \gg \theta$, $y \gg \theta$: $g(x-y)=g(x)-g(y)$, мы получим аддитивный функционал, определенный во всем E. Очевидно также, что аддитивный функционал $\varphi(x)=$

$= g_0(x) - g(x)$ положителен, т. е. $\varphi(x) \geqslant 0$ при $x \gg \theta$. Отсюда φ, а, значит, и $g = g_0 - \varphi$ — линейный функционал. С другой стороны, из (11) следует, что g меньше всякой мажоранты множества $\mathfrak{M}$. Теорема доказана.

6. Замечание. Легко видеть, что условие (R_1) или эквивалентное ему условие (R_1') выполняется, если выполняется условие (R_0) или эквивалентное ему условие (R_0'), получающиеся из (R_1) соответственно (R_1') заменой всюду знака $\gg$ знаком $\geqslant$.

С другой стороны, условие (R_0), очевидно, выполняется, если в самом E каждый элемент x допускает минимальное разложение, т. е.

(R) *Каждый элемент $x \in E$ допускает разложение $x = x_+ - x_-$ $(x_+ \geqslant \theta$, $x_- \geqslant \theta)$ такое, что при всяком ином разложении $x = x_1 - x_2$ $(x_1 \geqslant \theta, x_2 \geqslant \theta)$ непременно $x_1 > x_+$, и, значит, $x_2 > x_-$.*

Условия (R_0), (R_0') и (R) удобны тем, что они сохраняют смысл и для нормального конического множества без внутренних точек. Пользуясь одним предложением В. Л. Шмульяна *, нетрудно показать, что и в случае нормального замкнутого конического множества K без внутренних точек условие (R) является достаточным для того, чтобы любой функционал $f \in \overline{E}$ допускал минимальное разложение и, более того, чтобы имело место предложение A). Точно так же и условие (R_0) является достаточным для этого, если только множество K является воспроизводящим, т. е. любой элемент $x \in K$ допускает разложение $x = x_1 - x_2$, где $x_1 \in K_1$, $x_2 \in K_2$.

Заметим еще, что, как недавно было показано Селимом Крейном ([8]) и автором, пространство E с нормальным конусом, удовлетворяющим условию (R), изоморфно пространству всех непрерывных функций, определенных на некотором хаусдорфовом бикомпактном множестве.

7. Возвращаясь к общему случаю нормального конуса, удовлетворяющего условию (R_1), приведем еще следующие результаты, полученные автором совместно с С. Крейном.

Пусть $u \geqslant \theta$; введем с помощью u новую норму $|x|_u$, топологически эквивалентную данной: $|x|_u = \inf t$ $(-tu < x < tu)$, и соответствующую норму $|f|_u$ $(f \in \overline{E})$: $|f|_u = \sup \dfrac{f(x)}{|x|_u}$.

Обозначим через H_u множество положительных функционалов f, удовлетворяющих условию $|f|_u = f(u) = 1$, а через S_u экстремальные точки множества H_u [см. ([8])].

Имеет место следующее предложение:

Пусть $f_i \in S_u$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ все различны между собой; тогда при любых C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$\left|\sum_1^n C_i f_i\right|_u = \sum_1^n |C_i|. \tag{12}$$

Поэтому, если S_u содержит бесконечную последовательность $\{f_i\}$, то $\overline{E}$ содержит линейное подпространство, изоморфное (l) и которое состоит из всевозможных элементов вида $\sum\limits_{i=1}^{\infty} C_i f_i$, где $\sum\limits_1^{\infty} |C_i| = \left|\sum\limits_1^{\infty} C_i f_i\right|_u < \infty$.

---

* Обобщая одно предложение автора, В. Л. Шмульян доказал, что если некоторое замкнутое множество $K \subset E$ обладает свойствами 1°, 2° и, кроме того, каждый элемент $x \in E$ допускает разложение $x = x_1 - x_2$ $(x_1, x_2 \in K)$, то для каждого $x \in E$ существует разложение $x = x_1' - x_2'$ $(x_1', x_2' \in K)$ такое, что $|x_1'| + |x_2'| < C|x|$, где C не зависит от x.

Ввиду этого, если E регулярно, то S_u состоит из конечного числа точек; кроме того, в этом случае в силу (12) E эквивалентно некоторому эвклидовому пространству E_n векторов $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, причем $x \gg \theta$ тогда и только тогда, когда у соответствующего вектора из E_n все координаты $\xi_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Последнее предложение содержит между прочим основной результат статьи А. Юдина ([9]).

Одесский государственный университет

Поступило
21 IV 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa (1932). [2] М. Крейн, ДАН, XXVIII, № 1, стр. 13 (1940). [3] Н. Ахиезер и М. Крейн, О некоторых вопросах в проблеме моментов, статья III (1938). [4] S. Mazur, Studia Mathematica, IV (1933). [5] F. Riesz, Atti del congresso internazionale dei Matematici, Bologna, III, p. 143—148 (VI) (1928). [6] F. Riesz, Annals of Mathematics, **41**, № 1 (1940). [7] Л. В. Канторович, ДАН, I, № 7 (1936). [8] М. Крейн и С. Крейн, ДАН, XXVII, № 5 (1940). [9] А. Юдин, ДАН, XXIII, № 5 (1939).