Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 1

МАТЕМАТИКА

М. КРЕЙН

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НОРМАЛЬНЫХ КОНИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 19 IV 1940)

1. В дальнейшем E означает некоторое линейное нормированное пространство, а $\overline{E}$—сопряженное к нему пространство линейных функционалов (1).

Пусть $K \subset E$—некоторое множество, обладающее следующими свойствами:

1° Если $x \in K$, то $\lambda x \in K$ при $\lambda \geqslant 0$.

2° Если $x \in K$ и $y \in K$, то $x+y \in K$.

3° Если $x \in K$, $x \neq \theta$, то $-x \,\overline{\in}\, K$.

Отправляясь от этого множества, условимся писать $x < y$ (или $y > x$; $x, y \in E$), если $y \neq x$ и $y-x \in K$. Условимся далее писать $g < f$ $(g, f \in \overline{E})$, если $g \neq f$ и $g(x) \leqslant f(x)$ при $x \in K$.

В частности, соотношение $g > \theta$ $(g \in \overline{E})$ будет обозначать, что $g \neq \theta$ и $g(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant \theta$, т. е. $x \in K$; линейные функционалы g, удовлетворяющие такому соотношению, будем называть положительными.

Обозначим через Q множество всех $x \in E$, которым соответствуют такие пары элементов $u \in E$, $v \in E$, что

$$u < x < v, \quad |u| \leqslant 1, \quad |v| \leqslant 1. \tag{1}$$

Очевидно, Q содержит единичную сферу S $(|x| < 1)$ пространства E и, если $x \in Q$, то $-x \in Q$.

Множество $K \subset E$, удовлетворяющее условиям 1°, 2°, 3°, будем называть нормальным коническим множеством, если выполняется еще следующее условие:

4°. Существует такое $\delta > 0$, что

$$|e_1+e_2| > \delta \text{ при } e_i \in K, \quad |e_i| = 1 \quad (i=1, 2). \tag{2}$$

Критерий А. *Для того чтобы множество $K \subset E$, обладающее свойствами* 1°, 2°, 3°, *было нормальным коническим множеством, необходимо и достаточно, чтобы множество Q было ограниченным, т. е. чтобы существовало такое число $\sigma > 0$, что из* (1) *следует* $|x| < \sigma$.

Доказательство. Условие необходимо. Действительно, из (1) следует, что

$$e_1 = \frac{v-x}{|v-x|} > \theta, \quad e_2 = \frac{x-u}{|x-u|} > \theta.$$

Но тогда

$$\delta < |e_1+e_2| = \left|\frac{v-u}{|v-x|} - \left(\frac{1}{|v-x|} - \frac{1}{|x-u|}\right)(x-u)\right| \leqslant \frac{|v-u|}{|v-x|} +$$
$$+ \frac{||x-u|-|v-x||}{|v-x|} \leqslant \frac{2|v-u|}{|v-x|} \leqslant \frac{y}{|v-x|},$$

откуда $|x| \leqslant |v| + \frac{4}{\delta} \leqslant 1 + \frac{4}{\delta}$.

Условие достаточно. Действительно, если

$$e_1 > \theta,\ e_2 > \theta,\ |e_1| = |e_2| = 1,\ |e_1+e_2| = \mu,$$

то

$$-\frac{e_1+e_2}{\mu} < \frac{e_1}{\mu} < \frac{e_1+e_2}{\mu}, \quad \left|\frac{e_1+e_2}{\mu}\right| = 1,$$

и, следовательно, $\left|\frac{e_1}{\mu}\right| < \sigma$, т. е. $\mu > \delta = \frac{1}{\sigma}$.

2. Положим для любого $x \in E$

$$|x|_Q = \inf t \ \ (t > 0,\ x \in tQ).$$

Тогда при любых $x, y \in E$ и $-\infty < \lambda < \infty$:

I. $0 \leqslant |x|_Q \leqslant |x|$, II. $|\lambda x|_Q = |\lambda|\,|x|_Q$, III. $|x+y|_Q \leqslant |x|_Q + |y|_Q$,

причем первое следует из того, что Q содержит единичную сферу $[S$

Заметим еще, что $|x|_Q = 0$ тогда и только тогда, когда x и $-x$ одновременно принадлежат замыканию K.

Отождествим в E те элементы x и y, для которых $|x-y|_Q = 0$; полученное таким образом линейное нормированное пространство с нормой $|x|_Q$ обозначим через E_Q. В силу I всякий линейный функционал $f \in \overline{E}_Q$ порождает естественным образом линейный функционал в E.

Теорема 1. *Для того чтобы линейный функционал $f \in \overline{E}$ допускал разложение*

$$f = g - h, \quad g \geqslant \theta, \quad h \geqslant \theta, \tag{3}$$

необходимо и достаточно, чтобы он порождался некоторым функционалом из $\overline{E}_Q$, или, что то же, чтобы функционал f был ограничен на Q.

Доказательство. Условие необходимо. Действительно, если $g \geqslant \theta$, то из (1) следует, что

$$-|g| \leqslant -g(u) \leqslant g(x) \leqslant g(v) \leqslant |g|,$$

т. е. $|g(Q)| \leqslant |g|$. Аналогично, из $h \geqslant \theta$ следует, что $|h(Q)| \leqslant |h|$. Откуда $|f(Q)| \leqslant |g| + |h|$.

Условие $|f(Q)| \leqslant C$, т. е. $|f(x)| \leqslant C$ при $x \in Q$, достаточно, ибо из него следует, что $|f(x)| \leqslant C|x|_Q$, т. е. f является (точнее, порождается) некоторым линейным функционалом из E_Q.

В силу теоремы Ю. Гросберга и М. Крейна [2] каждый функционал $f \in \overline{E}_Q$ допускает каноническое разложение

$$f = g - h, \tag{4}$$

где g и h — линейные и положительные функционалы на E_Q, при этом

$$|f|_Q = |g|_Q + |h|_Q \ \ (|f|_Q = \sup_{x \in Q} f(x)).$$

Разложение (4) в E_Q одновременно порождает требуемое разложение функционала f в E.

В частности, из теоремы 1 следует, что если замыкание K не совпадает со всем пространством E, то множество положительных функционалов не пусто (впрочем это можно достаточно просто доказать независимо от теоремы 1). Действительно, в этом случае существуют элементы $x \in E$ такие, что $|x|_Q \neq 0$ и, следовательно, E_Q, а значит, и $\bar{E}_Q$ содержат элементы, отличные от нуля; с другой стороны, каждый функционал $f \in \bar{E}_Q$, $f \neq 0$ порождает, по крайней мере, один положительный функционал в E.

Теорема 2. *Для того чтобы любой линейный функционал $f \in \bar{E}$ допускал разложение* (3), *необходимо и достаточно, чтобы K было нормальным коническим множеством.*

Доказательство. Действительно, согласно теореме 1 для того, чтобы любой линейный функционал $f \in \bar{E}_Q$ допускал разложение, необходимо и достаточно, чтобы для любого $f \in \bar{E}_Q$ множество $f(Q)$ было ограниченным, а для этого необходимо и достаточно, чтобы Q было ограниченным.

Заметим, что если Q — ограниченное множество, то $|x|_Q$ топологически эквивалентна норме $|x|$.

Если нормальное коническое множество замкнуть, то оно сохранит все свои свойства 1°—4°. Поэтому без ограничения общности мы, не оговаривая этого, будем считать всякое нормальное коническое множество замкнутым.

3. Д. П. Мильман обратил внимание автора на существование следующего критерия.

Критерий В. *Если множество $K \subset E$, обладающее свойствами* $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$, *содержит внутренний элемент u, то для того, чтобы K было нормальным коническим множеством, необходимо и достаточно, чтобы множество всех $x \in E$, для которых $-u < x < u$, было ограниченным.*

Необходимость условия следует из критерия А. Достаточность условия вытекает из того, что если u входит в K вместе со сферой радиуса, большего $r > 0$, то

$$u \pm r\frac{x}{|x|} > \theta, \quad -\frac{|x|}{r}u < x < \frac{|x|}{r}u,$$

и поэтому неравенства $y < x < z$, $|y| \leqslant 1$, $|z| \leqslant 1$ влекут неравенство

$$-\frac{u}{r} < x < \frac{u}{r},$$

и, следовательно, Q ограничено.

Нормальное коническое множество K, имеющее внутренние точки, будем просто называть **нормальным конусом***.

Если K — нормальный конус, u — некоторая внутренняя точка K, то мы положим для любого $x \in E$: $|x|_u = \inf t$, где $-tu < x < tu$.

Тогда $|x|_u$ является нормой, топологически эквивалентной первоначальной норме $|x|$. Положим, кроме того, для любого $f \in \bar{E}$ $|f|_u = \sup \frac{f(x)}{|x|_u}$.

* Сперва автор определял нормальный конус как множество $K \subset E$, удовлетворяющее условиям 1°, 2°, 3° и имеющее внутреннюю точку со свойством, указанным в критерии В. После того как Д. П. Мильман обратил внимание автора на существование критерия В, автор нашел общий критерий А и принял приведенные в настоящей статье определения нормального конического множества и нормального конуса.

Обозначим через H_u совокупность всех положительных функционалов f, для которых

$$f(u)=1 \text{ (или, что то же, } |f|_u=1). \qquad (5)$$

Введем теперь в пространстве $\overline{E}$ слабую топологию (топологию по Тихонову). В этой топологии под окрестностью элемента $f_0 \in \overline{E}$ понимается всякое множество $U(f_0; x_1, \ldots, x_n, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$, $x_1 \in E, \ldots, x_n \in E$, $n=1, 2, \ldots$), состоящее из всевозможных $f \in \overline{E}$, удовлетворяющих условию

$$|f_0(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

В силу результатов L. Alaoglu(3) сфера $|f|_u \leqslant 1$ является бикомпактным хаусдорфовым множеством, а отсюда нетрудно заключить, что и H_u является таковым. Кроме того, если E сепарабельно, то, как легко видеть, H_u есть метризуемое компактное множество.

Теорема 3. *Пусть K — нормальный конус, а u — некоторый его внутренний элемент. Сопоставим каждому элементу $x \in E$ непрерывную на хаусдорфовом бикомпактном множестве H_u функцию $\varphi_x(f) = f(x)$ $(f \in H_u)$.*

Тогда линейное соответствие $x \longleftrightarrow \varphi_x(f)$ обладает следующими свойствами:

1° *Соотношение $x < y$ $(x \neq y)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi_x(f) \leqslant \varphi_y(f)$ $(f \in H_u)$.*

2° $\varphi_u(f) \equiv 1$ $(f \in H_u)$.

3° $|x|_u = \max |\varphi_x(f)|$ $(f \in H_u)$.

Доказательство. Легко видеть, что некоторый элемент $x > \theta$ тогда и только тогда, когда $f(x) \geqslant 0$ при любом $f > \theta$. Следовательно, вообще $x < y$, если при любом $f > \theta$: $f(x) \leqslant f(y)$. Откуда следует 1°.

Утверждение 2° выражает то же, что и (5).

В силу утверждений 1°, 2° неравенство

$$-tu < x < tu$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$-t \leqslant \varphi_x(f) = f(x) \leqslant t \quad (f \in H_u).$$

Откуда

$$|x|_u = \inf t = \max_{f \in H_u} |\varphi_x(f)|.$$

4. Следующая теорема является обобщением теоремы 3.

Теорема 4*. *Пусть K — замкнутое множество, обладающее свойствами 1°, 2°, 3°. Обозначим через H множество положительных функционалов $f > \theta$ $(f \in \overline{E})$, для которых $|f|_Q = \sup_{x \in Q} f(x) \leqslant 1$. Тогда в слабой топологии H является бикомпактным хаусдорфовым множеством. Если каждому x сопоставить непрерывную на H функцию $\varphi_x(f) = f(x)$ $(f \in H)$, то линейное соответствие $x \longleftrightarrow \varphi_x(f)$ будет обладать следующими свойствами:*

1° *Соотношение $x < y$ $(x \neq y)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi_x(f) \leqslant \varphi_y(f)$ $(f \in H)$.*

2° $\max_{f \in H} |\varphi_x(f)| \leqslant |x|$ $(x \in E)$.

3° *Соответствие $x \longleftrightarrow \varphi_x(f)$ является одно-однозначным.*

4° *Если K — нормальное коническое множество (и только при этом условии), соответствие $x \longleftrightarrow \varphi_x(f)$ является изоморфизмом, т. е. одно-однозначным линейным непрерывным соответствием между E и некото-*

---

* Ср. с теоремой 2 заметки Ю. Гросберга и М. Крейна(2).

рой частью пространства всех непрерывных функций $\varphi(f)$ $(f \in H)$ *с обычным определением нормы* $\|\varphi\| = \max |\varphi(f)|$ $(f \in H)$.

Доказательство. Утверждение 1° доказывается так же, как и 1° в теореме 3.

Утверждение 2° вытекает из того, что

$$\max_{f \in H} |\varphi_x(f)| = |x|_Q \leqslant |x|. \tag{6}$$

Действительно, если $t > |x|_Q$, то найдутся такие u и v, что $tu < x < tv$, $|u| \leqslant 1$, $|v| \leqslant 1$.

А так как $|u|_Q \leqslant |u| \leqslant 1$, $|v|_Q \leqslant |v| \leqslant 1$, то для любого $f \in H$ имеем $-t \leqslant -|f|_Q t < f(tu) \leqslant f(x) = \varphi_x(f) < f(tv) < |f|_Q t \leqslant t$.

Следовательно,

$$|\varphi_x(f)| \leqslant \inf t = |x|_Q \quad (f \in H). \tag{7}$$

Пусть теперь

$$r = \max_{f \in H} |\varphi_x(f)| \quad \text{или} \quad r = \max_{f > \theta} \frac{|\varphi_x(f)|}{|f|_Q}. \tag{8}$$

Найдем такой линейный функционал $f_0 \in \overline{E}_Q$, что

$$f_0(x) = |x|_Q, \quad |f_0|_Q = 1, \tag{9}$$

и пусть [см. (2)]

$$f_0 = g_0 - h_0, \quad g_0 \geqslant \theta, \quad h_0 \geqslant \theta, \quad |g_0|_Q + |h_0|_Q = 1. \tag{10}$$

Тогда, в силу (9), (10) и (8), имеем

$$|x|_Q \leqslant |g_0(x)| + |h_0(x)| = |\varphi_x(g_0)| + |\varphi_x(h_0)| \leqslant r|g_0|_Q + r|h_0|_Q = r.$$

Итак, $r \geqslant |x|_Q$; сопоставляя это с (7), приходим к (6).

Утверждение 3° теоремы вытекает из того, что если K замкнуто, то $|x|_Q > 0$ при $x \neq \theta$.

Утверждение 4° следует из того, что K является нормальным коническим множеством тогда и только тогда, когда норма $|x|_Q$ топологически эквивалентна первоначальной норме $|x|$.

Из теоремы 3 немедленно получается такое обобщение классической теоремы Dini.

Теорема 5. *Пусть K — нормальное коническое множество. Если ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$, $u_i > \theta$ $(i = 1, 2, \ldots)$, сходится слабо к некоторому элементу $v \in E$, то он сходится сильно и при любом порядке своих элементов к v.*

Следующая теорема является обобщением теоремы Hadamard'a-Pringsheim'a.

Теорема 6. *Пусть K — нормальное коническое множество. Пусть степенной ряд от λ $u_0 + u_1\lambda + u_2\lambda^2 + \ldots$, где $u_i > \theta$ $(i = 1, 2, \ldots)$, имеет конечный радиус сходимости $\rho > 0$. Тогда точка $\lambda = \rho$ является особенной для этого ряда.*

После теоремы 5, которую можно также сформулировать для двойных рядов, теорема 6 может быть доказана так же, как и обычная теорема Hadamard'a (4).

Теорема 6 имеет интересные применения в теории операторов, оставляющих инвариантным некоторое коническое множество K, о чем мы надеемся сообщить в другом месте.

Одесский государственный университет

Поступило
21 IV 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa (1932). [2] Ю. Гросберг и М. Крейн, ДАН, XXV, № 9 (1939). [3] L. Alaoglu, Annals of Math., 41, № 1 (1940). [4] Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, 2, S. 289—290.