Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 1

МАТЕМАТИКА

В. П. САВКЕВИЧ

К СХЕМЕ УРНЫ С ДОБАВЛЯЕМЫМИ ШАРАМИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 4 V 1940)

Пусть в урне находится a белых и b черных шаров и опыт заключается в вынимании одного шара, возвращении его обратно с прибавлением еще R шаров, в число которых входит ν белых и ρ черных, если был вынут белый шар, и ν_1 белых и ρ_1 черных, если был вынут черный шар.

Пусть x_n означает число белых шаров, оказавшихся в урне после n опытов. Величина x_n представляет сумму зависимых величин, первая из которых равна первоначальному числу белых шаров, а каждая последующая может принимать одно из двух значений ν или ν_1, с вероятностями, зависящими от величины суммы предшествующих слагаемых.

Рассматривая эту схему в качестве упражнения в своем курсе «Теория вероятностей» (1), акад. С. Н. Бернштейн указал путь вычисления математического ожидания и дисперсии величины x_n, определил их асимптотические значения и установил, что закон больших чисел применим к величинам x_n во всех случаях рассматриваемой схемы, кроме случая, когда $\nu_1=\rho=0$, который соответствует схеме Маркова и приводит к кривым Пирсона.

В настоящей работе для общего случая схемы найдено точное значение дисперсии величины x_n и составлены рекуррентные уравнения для математического ожидания третьей и четвертой степеней отклонения, а для случая симметричного $[a=b,\ \nu_1=\rho\neq 0]$ установлено, что в случае, когда $\nu>3\nu_1$, величины x_n не подчиняются в пределе закону Гаусса, а в случае, когда $\nu<3\nu_1$, можно ожидать, что величины x_n подчиняются в пределе нормальному закону распределения, закону Гаусса.

1° Введем следующие обозначения: $a_n=$ м. о. x_n, $b_n=$ м. о. $(x_n-a_n)^2$, $c_n=$ м. о. $(x_n-a_n)^3$, $d_n=$ м. о. $(x_n-a_n)^4$, положим, кроме того, $\delta=\nu-\nu_1$ и $M_n=\frac{a_n}{a+b+nR}$.

Следуя методу составления рекуррентных уравнений, указанному акад. С. Н. Бернштейном (1), находим последовательно рекуррентные уравнения:

$$a_{n+1}=a_n\left(1+\frac{\delta}{a+b+nR}\right)+\nu_1, \tag{1}$$

$$b_{n+1}=b_n\left(1+\frac{2\delta}{a+b+nR}\right)+\delta^2 M_n[1-M_n], \tag{2}$$

$$c_{n+1}=c_n\left(1+\frac{3\delta}{a+b+nR}\right)+b_n\frac{3\delta^2}{a+b+nR}[1-2M_n]+$$
$$+\delta^3M_n[1-M_n]\cdot[1-2M_n], \tag{3}$$
$$d_{n+1}=d_n\left(1+\frac{4\delta}{a+b+nR}\right)+c_n\frac{6\delta^2}{a+b+nR}[1-2M_n]+$$
$$+b_n\left\{6\delta^2M_n[1-M_n]+\frac{4\delta^3}{a+b+nR}[1-3M_n+3M_n^2]\right\}+$$
$$+\delta^4M_n[1-M_n][1-3M_n+3M_n^2]. \tag{4}$$

Из уравнения (1) определяется значение a_n в виде

$$a_n=\frac{\nu_1}{\rho+\nu_1}(a+b+nR)+\frac{a\rho-b\nu_1}{\rho+\nu_1}\left(1+\frac{\delta}{a+b}\right)\left(1+\frac{\delta}{a+b+R}\right)\dots$$
$$\dots\left(1+\frac{\delta}{a+b+\overline{n-1}R}\right); \tag{5}$$

решая уравнение (2), получаем значение дисперсии

$$b_n=\left(1+\frac{2\delta}{a+b}\right)\dots\left(1+\frac{2\delta}{a+b+\overline{n-1}R}\right)\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\delta^2M_i[1-M_i]}{\left(1+\frac{2\delta}{a+b}\right)\dots\left(1+\frac{2\delta}{a+b+iR}\right)}. \tag{6}$$

2°. Симметричный случай. Полагая в (5) $a=b$, $\nu_1=\rho\neq0$, находим

$$a_n=a+\frac{n}{2}R. \tag{5*}$$

Тогда $M_n=\frac{1}{2}$, и из выражения (6) получим

$$b_n=\frac{\delta^2}{4}\left[\left(1+\frac{2\delta}{2a+R}\right)\dots\left(1+\frac{2\delta}{2a+\overline{n-1}R}\right)+\dots+\left(1+\frac{2\delta}{2a+\overline{n-1}R}\right)+1\right]. \tag{6*}$$

Исключая из рассмотрения случай, когда $R=2\delta$, решение уравнения (2) можно представить в виде

$$b_n=\frac{\delta^2}{4}\cdot\frac{2a+nR}{R-2\delta}-\frac{\delta^2}{4}\cdot\frac{2a}{R-2\delta}\left(1+\frac{2\delta}{2a}\right)\dots\left(1+\frac{2\delta}{2a+\overline{n-1}R}\right). \tag{7}$$

Уравнение (3) в симметричном случае не имеет свободного члена, и поэтому $c_n=0$. В силу этого, найденное в 1° рекуррентное соотношение для d_n значительно упрощается, оно будет

$$d_{n+1}=d_n\left(1+\frac{4\delta}{2a+nR}\right)+b_n\left(\frac{3\delta^2}{2}+\frac{\delta^3}{2a+nR}\right)+\frac{\delta^4}{16}; \tag{4*}$$

решая (4*), находим

$$d_n=\frac{\delta^2}{4}b_n+\left(1+\frac{4\delta}{2a}\right)\dots\left(1+\frac{4\delta}{2a+\overline{n-1}R}\right)\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\frac{3}{2}\delta^2\left(1+\frac{\delta}{2a+iR}\right)b_i}{\left(1+\frac{4\delta}{2a}\right)\dots\left(1+\frac{4\delta}{2a+iR}\right)}. \tag{8}$$

Определим асимптотическое значение дисперсии b_n. Первый член в выражении (7) всегда порядка n. Асимптотическое значение произведения будет

$$\prod_{2,n}=\left(1+\frac{2\delta}{2a}\right)\dots\left(1+\frac{2\delta}{2a+\overline{n-1}R}\right)\approx\frac{\Gamma\left(\frac{2a}{R}\right)}{\Gamma\left(\frac{2a+2\delta}{R}\right)}\cdot n^{\frac{2\delta}{R}}. \tag{9}$$

Таким образом, второе слагаемое в выражении (7) имеет порядок $n^{\frac{2\delta}{R}}$ и, в зависимости от величины $\frac{2\delta}{R}$, может быть порядка выше n или ниже n, поэтому в дальнейшем мы рассмотрим отдельно два случая.

3° В случае, когда $2\delta > R$, т. е. если при вынимании шара число добавляемых шаров цвета вынутого шара больше трех четвертей всех добавляемых шаров, дисперсия величины x_n будет порядка $n^{\frac{2\delta}{R}}$, и асимптотическое значение ее, благодаря (9), будет

$$b_n \approx \frac{\delta^2}{4} \cdot \frac{2a}{2\delta - R} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2a}{R}\right)}{\Gamma\left(\frac{2a+2\delta}{R}\right)} \cdot n^{\frac{2\delta}{R}}. \tag{10}$$

Для определения асимптотического значения d_n достаточно в выражении (8) найти асимптотическое значение второго члена

$$d_n^* = \left(1+\frac{4\delta}{2a}\right)\dots\left(1+\frac{4\delta}{2a+\overline{n-1}R}\right)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\frac{3}{2}\delta^2\left(1+\frac{\delta}{2a+iR}\right)b_i}{\left(1+\frac{4\delta}{2a}\right)\dots\left(1+\frac{4\delta}{2a+iR}\right)}. \tag{11}$$

Подставляя сюда из (7) значение b_i, разбивая на две суммы и вынося за знак сумм множитель $3\cdot\frac{\delta^4}{16}\cdot\frac{4a^2}{(2\delta-R)^2}\cdot\frac{2\delta-R}{a}$, а под знаком сумм проделав некоторые преобразования, мы получим

$$d_n^* = 3\,\frac{\delta^4}{16}\cdot\frac{4a^2}{(2\delta-R)^2}\left(1+\frac{4\delta}{2a}\right)\dots\left(1+\frac{4\delta}{2a+\overline{n-1}R}\right)\times$$

$$\times\left[\frac{2\delta-R}{a}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\left(\frac{2a+2\delta}{R}\right)\dots\left(\frac{2a+2\delta}{R}+i-1\right)\left(\frac{2a+\delta}{R}+i\right)}{\left(\frac{2a+4\delta}{R}\right)\dots\left(\frac{2a+4\delta}{R}+i\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{2\delta-R}{a}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\left(\frac{2a}{R}+1\right)\dots\left(\frac{2a}{R}+i\right)\left(\frac{2a+\delta}{R}+i\right)}{\left(\frac{2a+4\delta}{R}\right)\dots\left(\frac{2a+4\delta}{R}+i\right)}\right].$$

Пользуясь далее значениями сумм бесконечных рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A(A+1)\dots(A+n)}{B(B+1)\dots(B+n)} = \frac{B-1}{B-A-1}, \quad \text{для } B > A+1 > 1,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{A(A+1)\dots(A+n)}{B(B+1)\dots(B+n)} = \frac{A(B-1)}{(B-A-1)(B-A-2)}, \text{ для } B > A+2 > 2,$$

а также асимптотическим значением произведения

$$\prod\nolimits_{4,n} = \left(1+\frac{4\delta}{2a}\right)\dots\left(1+\frac{4\delta}{2a+\overline{n-1}R}\right) \approx \frac{\Gamma\left(\frac{2a}{R}\right)}{\Gamma\left(\frac{2a+4\delta}{R}\right)}\cdot n^{\frac{4\delta}{R}}, \tag{12}$$

получим

$$d_n^* \approx 3\cdot\frac{\delta^4}{16}\cdot\frac{4a^2}{(2\delta-R)^2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2a}{R}\right)}{\Gamma\left(\frac{2a+4\delta}{R}\right)}\left[1+\frac{\delta}{a}+\frac{(R-\delta)(2\delta-R)}{a(4\delta-R)}\right]\cdot n^{\frac{4\delta}{R}}. \tag{13}$$

Из выражений (8), (10) и (13) следует

$$\frac{d_n}{b_n^{\frac{3}{2}}} \approx 3\,\frac{\Gamma\left(\frac{2a+2\delta}{R}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{2a+2\delta}{R}\right)}{\Gamma\left(\frac{2a}{R}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{2a+4\delta}{R}\right)}\left[1+\frac{\delta}{a}+\frac{(R-\delta)(2\delta-R)}{a(4\delta-R)}\right]=$$

$$=3\,\frac{\Gamma(\alpha+1+\theta)\cdot\Gamma(\alpha+1+\theta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\alpha+2+2\theta)}\cdot\frac{\alpha(2\theta+1)+2\theta+(1+\theta)^2}{\alpha(2\theta+1)}=$$

$$=3\,\frac{\Gamma(\alpha+1+\theta)\,\Gamma(\alpha+1+\theta)}{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\alpha+1+2\theta)}\cdot\frac{\alpha(2\theta+1)+2\theta+(1+\theta)^2}{(\alpha+1+2\theta)(2\theta+1)}<3, \qquad (14)$$

где $\alpha=\frac{2a}{R}$, $\theta=\frac{2\delta}{R}-1$.

Для утверждения, что закон Гаусса неприменим к суммам рассматриваемых случайных величин, необходимо еще дополнительно установить, что

$$\frac{\text{м. о.}\,|x_n-a_n|^q}{b_n^{\frac{q}{2}}}$$

ограничено для какого-нибудь $q>4$. Положим $f_n=\text{м. о.}\,(x_n-a_n)^6$, рекуррентное уравнение для f_n, найденное тем же способом, о котором мы уже упоминали в 1°, будет

$$f_{n+1}=f_n\left(1+\frac{6\delta}{2a+nR}\right)+\varphi_n, \qquad (15)$$

где

$$\varphi_n=\left(\frac{5\delta^2}{4}+\frac{5\delta^3}{2a+nR}\right)d_n+\left(\frac{15\delta^4}{16}+\frac{6\delta^5}{16(2a+nR)}\right)b_n+\frac{\delta^6}{64}.$$

Последовательное решение уравнения (15) дает

$$f_n=\left(1+\frac{6\delta}{2a}\right)\dots\left(1+\frac{6\delta}{2a+\overline{n-1}R}\right)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\varphi_i}{\left(1+\frac{6\delta}{2a}\right)\dots\left(1+\frac{6\delta}{2a+iR}\right)}.$$

Ряд $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{\varphi_i}{\left(1+\frac{6\delta}{2a}\right)\dots\left(1+\frac{6\delta}{2a+iR}\right)}$ сходится, так как φ_i того же порядка, что и d_i; следовательно, f_n порядка $n^{\frac{6\delta}{R}}$ и, так как b_n порядка $n^{\frac{2\delta}{R}}$, то

$$\frac{f_n}{b_n^3}\longrightarrow \text{const} \quad \text{при } n\longrightarrow\infty.$$

4° В случае, когда $2\delta<R$, т. е. если при вынимании шара число добавляемых шаров цвета вынутого шара меньше трех четвертей всех добавляемых шаров, дисперсия величины x_n будет порядка n, и асимптотическое значение ее будет

$$b_n\approx\frac{\delta^2}{4}\cdot\frac{R}{R-2\delta}\cdot n. \qquad (16)$$

Для определения асимптотического значения d_n достаточно определить асимптотическое значение d_n^*, определяемое формулой (11). Представим d_n^* в виде

$$d_n^*=\frac{3}{2}\cdot\frac{\delta^2}{4}\cdot\left(1+\frac{4\delta}{2a}\right)\dots\left(1+\frac{4\delta}{2a+\overline{n-1}R}\right)\times$$

$$\times\left[\sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_i}{\left(1+\frac{4\delta}{2a}\right)\dots\left(1+\frac{4\delta}{2a+\overline{i-1}R}\right)}+3\sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_i}{\left(1+\frac{4\delta}{2a}\right)\dots\left(1+\frac{4\delta}{2a+iR}\right)}\right].$$

Так как

$$\frac{b_i}{\left(1+\frac{4\delta}{2a}\right)\cdots\left(1+\frac{4\delta}{2a+iR}\right)}\approx\frac{\delta^2}{4}\cdot\frac{R}{R-2\delta}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2a+4\delta}{R}\right)}{\Gamma\left(\frac{2a}{R}\right)}\cdot i^{1-\frac{4\delta}{R}},$$

то

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{b_i}{\left(1+\frac{4\delta}{2a}\right)\cdots\left(1+\frac{4\delta}{2a+iR}\right)}\approx\frac{\delta^2}{4}\cdot\frac{R^2}{2(R-2\delta)^2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2a+4\delta}{R}\right)}{\Gamma\left(\frac{2a}{R}\right)}\cdot n^{2-\frac{4\delta}{R}};$$

благодаря этому, и, принимая во внимание (12), мы получим после упрощения

$$d_n^*\approx 3\frac{\delta^4}{16}\cdot\frac{R^2}{(R-2\delta)^2}\cdot n^2. \tag{17}$$

Из выражений (8), (16) и (17) следует

$$\frac{d_n}{b_n^2}\approx 3,$$

и, следовательно, по критерию Пирсона можно ожидать, что величины x_n в случае, когда $2\delta < R$, подчиняются нормальному закону распределения.

Институт математики и механики
Ленинградского государственного университета

Поступило
11 V 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Теория вероятностей, 135, 190 (1934).