Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 1

МАТЕМАТИКА

Академик С. Н. БЕРНШТЕЙН

ЗАДАЧА ОБ УРНЕ С ДОБАВЛЯЕМЫМИ ШАРАМИ

Из урны, содержащей a белых и b черных шаров, производится n извлечений; при этом после каждого извлечения вынутый шар возвращается в урну и, кроме того, добавляется R шаров: в случае появления белого шара добавляется ν белых шаров и $\rho = R - \nu$ черных шаров, в случае появления черного шара добавляется ν_1 белых шаров и $\rho_1 = R - \nu_1$ черных шаров. Требуется определить закон вероятностей для числа m вынутых белых шаров.

В. П. Савкевич в напечатанной ниже статье показал, что, если $\frac{\delta}{R} > \frac{1}{2}$, где $\delta = \nu - \nu_1$, то предельный закон для m не может быть законом Гаусса. В статье, печатающейся в другом месте, я показал, применяя свои общие теоремы о суммах зависимых величин, что рассматриваемый предельный закон, напротив, должен быть законом Гаусса, если $\frac{\delta}{R} \leqslant \frac{1}{2}$ и $\rho\nu_1 > 0$. Непосредственное доказательство последнего утверждения может быть дано и без помощи этих общих теорем и кажется мне не лишенным интереса; поэтому я позволю себе привести его, ограничиваясь для упрощения вычислений, как и В. П. Савкевич, симметричным случаем, когда $\nu = \nu_1 > 0$, $a = b$ $\left(\text{и исключая здесь случай } \frac{\delta}{R} = \frac{1}{2}\right)$.

Обозначая через $\varphi_n(z)$ характеристическую функцию распределения вероятностей величины отклонения $m - \frac{n}{2}$, нетрудно установить, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению в конечных разностях

$$\varphi_{n+1}(z) = \varphi_n(z) \cos\frac{z}{2} + \frac{2\delta}{2a + nR} \varphi_n'(z) \sin\frac{z}{2}. \tag{1}$$

Задача сводится к нахождению асимптотического значения функции $\varphi_n(z)$ при $n \to \infty$, если $\varphi_0(z) = 1$. При этом существенное значение имеет то, что в зависимости от соблюдения неравенства $\frac{2\delta}{R} > 1$ или $\frac{2\delta}{R} < 1$ мат. ожид. $\left(m - \frac{n}{2}\right)^2 = O\left(n^{\frac{2\delta}{n}}\right)$ или $O(n)$. А именно, в случае $\frac{2\delta}{R} > 1$

асимптотическое значение $\varphi_n(z)$ зависит от a и выражение его в явном виде весьма сложно; напротив, в случае $\frac{2\delta}{R} < 1$ $\varphi_n(z) \sim e^{-cnz^2}$, где $c = \frac{R}{8(R-2\delta)}$, т. е. соответствует нормальному распределению с дисперсией $\frac{nR}{4(R-2\delta)}$.

Итак, при условии $\frac{2\delta}{R} < 1$ положим $\varphi_n(z) = \theta_n(z\sqrt{n})$, т. е. обозначим через $\theta_n(z)$ характеристическую функцию величины $x_n = \frac{m - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}}$; тогда уравнение (1) преобразуется в

$$\theta_{n+1}\left(z\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right) = \theta_n(z)\cos\frac{z}{2\sqrt{n}} + \frac{2\delta\sqrt{n}}{2a+nR}\theta_n'(z)\sin\frac{z}{2\sqrt{n}}. \tag{2}$$

Принимая во внимание, что м. о. x_n^2 и м. о. x_n^4 ограничены $\left(\text{при } \frac{2\delta}{R} < 1\right)$, замечаем, что $\theta_n'(z)$, $\theta_n''(z)$, $\theta_n'''(z)$, $\theta_n^{\mathrm{IV}}(z)$ ограничены при всех вещественных z.

Дифференцируя (2), имеем также

$$\sqrt{\frac{n+1}{n}}\,\theta_{n+1}'\left(z\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right) = \theta_n'(z)\left(1 + \frac{\delta}{2a+nR}\right)\cos\frac{z}{2\sqrt{n}} -$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{n}}\theta_n(z)\sin\frac{z}{2\sqrt{n}} + \frac{2\delta\sqrt{n}}{2a+nR}\theta_n''(z)\sin\frac{z}{2\sqrt{n}}. \tag{3}$$

Поэтому, вследствие сделанного только что замечания, уравнение (2) можем записать в виде

$$n(\theta_{n+1}'(z) - \theta_n(z)) = -\frac{z}{2}\theta_{n+1}'(z) - \frac{z^2}{8}\theta_n(z) + \frac{\delta z}{R}\theta_n'(z) + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{2bis}$$

а уравнение (3) запишем в виде

$$n(\theta_{n+1}'(z) - \theta_n'(z)) = -\frac{1}{2}\theta_{n+1}'(z) - \frac{z}{4}\theta_n(z) + \left(\frac{\delta}{R} - \frac{z^2}{8}\right)\theta_n'(z) +$$

$$+\frac{\delta z}{R}\theta_n''(z) + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3bis}$$

Дифференцируя еще раз уравнение (3), убеждаемся также, что

$$\theta_{n+1}''(z) - \theta_n''(z) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поэтому уравнения (2 bis) и (3 bis) можем представить в виде

$$\left.\begin{aligned} n(\theta_{n+1}(z) - \theta_n(z)) &= u_n(z) + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ n(\theta_{n+1}'(z) - \theta_n'(z)) &= u_n'(z) + O\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где

$$u_n(z) = -\frac{z^2}{8}\theta_n(z) + z\left(\frac{\delta}{R} - \frac{1}{2}\right)\theta_{n+1}'(z).$$

Покажем, что $u_n(z) \to 0$ равномерно в любом конечном промежутке $(-L < z < L)$. Действительно, из уравнений (4) следует, что

$$\left|u_{n+1}(z) - u_n(z) + \frac{z^2}{8n}u_n(z) + \frac{z}{n}\left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{R}\right)u_{n+1}'(z)\right| < \frac{C}{n^2}, \tag{5}$$

где C—постоянная, зависящая только от L. Пусть $M_n = \text{Макс.}\,|u_n(z)|$ в данном промежутке; в таком случае, учитывая, что в точке z_{n+1}, где достигается

$$M_{n+1} = \text{Макс.}\,|u_{n+1}(z)|,$$

имеем

$$z_{n+1}u'_{n+1}(z_{n+1})\,u_{n+1}(z_{n+1}) \geqslant 0,$$

заключаем из (5), что $\left(\frac{\delta}{R}<\frac{1}{2}\right)$

$$M_{n+1} < M_n\left(1-\frac{z_{n+1}^2}{8n}\right)+\frac{C}{n^2} \qquad (n>0). \tag{6}$$

Поэтому при любом $q \geqslant 0$

$$M_{n+q+1} < M_n \prod_{i=0}^{q}\left[1-\frac{z_{n+i+1}^2}{8(n+i)}\right]+\frac{2C}{n}. \tag{7}$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ есть данное произвольно малое число; выбираем $n_0 > 0$ настолько большим, что $\frac{2C}{n_0}<\frac{\varepsilon}{2}$. Но, принимая во внимание ограниченность $\theta_n(z)$ и $\theta_n'(z)$, можем указать такую постоянную A, чтобы на всем промежутке $(-L, L)$ иметь $|u_n(z)| < A|z|$ при любом $n>0$. В таком случае произойдет одно из двух: либо найдется такое $n \geqslant n_0$, при котором $|z_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2A}$, тогда $M_n < \frac{\varepsilon}{2}$, и, следовательно, благодаря (7), $M_{n+q+1} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ при всяком $q \geqslant 0$; либо $|z_n| > \frac{\varepsilon}{2A}$ для всех $n \geqslant n_0$, но тогда, в силу (7),

$$M_{n_0+q+1} < M_{n_0}\prod_{i=0}^{q}\left[1-\frac{\varepsilon^2}{32A^2(n_0+i)}\right]+\frac{\varepsilon}{2},$$

а потому для q достаточно большого также должно соблюдаться неравенство $M_{n_0+q+1}<\varepsilon$, которое, следовательно, осуществляется в обоих случаях.

С другой стороны, вследствие ограниченности $\theta_n''(z)$, из последовательности функций $\theta_n(z)$ можно выбрать такую подпоследовательность, что $\theta_n(z) \to \theta(z)$, $\theta_n'(z) \to \theta'(z)$ равномерно на $(-L, +L)$ и, вследствие $u_n(z) \to 0$, имеем

$$u(z) = -\frac{z^2}{8}\theta(z)+z\left(\frac{\delta}{R}-\frac{1}{2}\right)\theta'(z)=0,$$

откуда $\theta(z)=e^{-cz^2}$, где $c=\frac{R}{8(R-2\delta)}$ [так как $\theta(0)=1$]. Следовательно, $\theta_n(z) \to e^{-cz^2}$ при всех $n \to \infty$, а потому вероятность неравенства

$$m-\frac{n}{2} < t\sqrt{\frac{nR}{4(R-2\delta)}} \qquad (R>2\delta)$$

имеет пределом $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$

Поступило
11 V 1940