

---

УДК 62-83: 621.313.333

*Ю. А. Рудченко, А. В. Козлов*

**СОСТАВЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СТЕНДА ИСПЫТАНИЯ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**

---

UDC 62-83: 621.313.333

*Y. A. Rudchenko, A. V. Kozlov*

**THE DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL MODEL OF THE STAND FOR TESTING ELASTIC ELEMENTS BASED ON A SELF-OSCILLATING ELECTROMECHANICAL SYSTEM**

---

**Аннотация**

Работа посвящена созданию математической модели стенда испытания упругих элементов на основе автоколебательной электромеханической системы. Модель необходима для проведения анализа процессов в электромеханических системах электродвигатель–упругий элемент и для разработки методики проектирования испытательных стендов упругих элементов.

**Ключевые слова:**

математическая модель, пружина, испытательный стенд, автоколебания, асинхронный электродвигатель.

**Abstract**

The paper deals with the development of a mathematical model of the stand for testing elastic elements on the basis of a self-oscillating electromechanical system. The model is required to analyze electromechanical processes occurring in such systems and to develop the methodology of designing testing stands for elastic elements.

**Key words:**

mathematical model, spring, testing stand, autooscillations, induction motor.

---

***Введение***

Подход к построению автоколебательных приводов [1], при котором реализуется мягкий реверс, на основе общего принципа построения автоколебательных механических систем разомкнутого типа является наиболее рациональным в системах, где присутствует консервативная пара «масса» – «упругость». Одна из таких систем – стенд для испытания упругих элементов, в котором в качестве «массы» выступает вал двигателя, а в качестве «упругости» – испытуемый элемент, например, пружина.

***Исследуемая схема создания автоколебательного режима***

В зависимости от назначения колебательных комплексов и технологических установок на базе асинхронных электроприводов периодического движения можно построить ряд схем функционально-структурной организации силовой части автоколебательных электроприводов. В работе рассматривается схема, представленная на рис. 1, в которой редуктор не преобразует вращение в колебания, а выполняет вспомогательную роль – преобразует возвратно-вращательное движение вала электро-

двигателя в возвратно-поступательное движение пружины. В качестве редуктора может выступать шкив, насажен-

ный на вал двигателя, с прикрепленным к нему тросом.

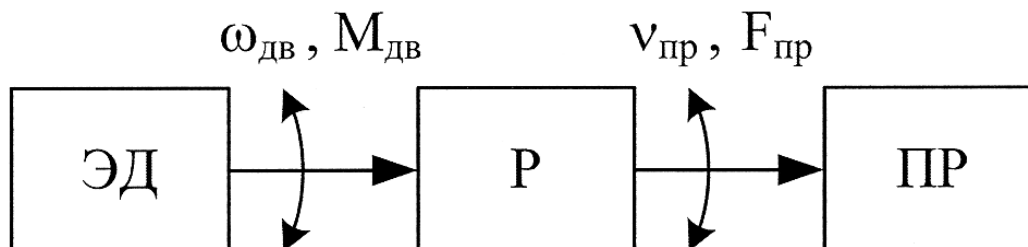


Рис. 1. Схема построения механической части автоколебательной системы: ЭД – электродвигатель вращательного движения; Р – редуктор; ПР – пружина

Как известно [2], механическая мощность, вырабатываемая электродвигателем в колебательном режиме, в отличие от мощности, получаемой при вращательном или линейном движении, имеет не только активную, но и реактивную составляющую.

Реактивная составляющая механической мощности «индуктивного» характера всегда присутствует на выходе электродвигателя из-за наличия на валу моментов инерции и движущихся масс. Реактивная составляющая механической мощности «емкостного» характера либо специально создается для компенсации «индуктивной» реактивной составляющей и обеспечения автоколебательного движения за счет размещения на валу позиционного элемента в виде пружины или маятника, либо получается за счет упругих и дисбалансных нагрузочных усилий. В стендах испытания упругих элементов не требуется специально вводить позиционный элемент – он присутствует в виде испытуемого упругого элемента, например, пружины.

#### **Вывод уравнения движения автоколебательной системы в абсолютных переменных**

На основании третьего закона Ньютона для углового движения в обеих обобщенных схемах можно записать

уравнение равновесия моментов на валу двигателя

$$M_{\text{дин}} + M_{\text{ж.т}} + M_{\text{с.т}} + M_{\text{поз.}} = M_{\text{эм}}, \quad (1)$$

где  $M_{\text{дин}}$  – суммарный динамический момент;  $M_{\text{ж.т}}$ ,  $M_{\text{с.т}}$  – суммарные моменты жидкостного и сухого трения соответственно;  $M_{\text{поз.}}$ ,  $M_{\text{эм}}$  – суммарный позиционный и электромагнитный моменты.

Нагрузочные моменты рабочих машин весьма разнообразны, но чаще всего это моменты, представленные в левой части уравнения (1). Ограничиваясь этой нагрузкой, запишем уравнение общего нагружающего момента  $M_{\text{н}}$  на валу двигателя:

$$M_{\text{н}} = J_{\Sigma} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + H_{\Sigma} \frac{d\varphi}{dt} + M_{\text{тр}\Sigma} \text{Sign} \frac{d\varphi}{dt} + C_{\Sigma} \varphi, \quad (2)$$

где  $\varphi$  – угол поворота вала двигателя.

Используя типовые формулы приведения параметров нагрузки к валу двигателя, найдем расчетные соотношения для коэффициентов слагаемых в (2) с учетом схемы механической части автоколебательной системы (см. рис. 1).

Получим выражение для суммарного момента инерции. Для этого приведем массу пружины, совершающую

линейное движение к вращательному. На основании закона сохранения (равенства) запаса кинетической энергии при его передаче от поступательно движущегося тела вращательно движущемуся телу

$$\frac{J_{\text{пр}} \cdot \omega_{\text{дв}}^2}{2} = \frac{m_{\text{пр}} \cdot v_{\text{пр}}^2}{2},$$

$$J_{\text{пр}} = \frac{m_{\text{пр}} \cdot v_{\text{пр}}^2}{\omega_{\text{дв}}^2} = m_{\text{пр}} \cdot i^2.$$

Таким образом,

$$J_{\Sigma} = J_{\text{дв}} + J_{\text{ред}} + J_{\text{пр}} = J_{\text{дв}} + J_{\text{ред}} + m_{\text{пр}} \cdot i^2, \quad (3)$$

где  $J_{\text{дв}}$ ,  $J_{\text{ред}}$ ,  $J_{\text{пр}}$  – моменты инерции двигателя, редуктора, пружин;  $m_{\text{пр}}$  – масса пружин;  $i$  – передаточное число редуктора,

$$i = \frac{v_{\text{пр}}}{\omega_{\text{дв}}}, \quad (4)$$

где  $\omega_{\text{дв}}$  – угловая скорость вала двигателя при скорости поступательного движения пружины  $v_{\text{дв}}$ .

Далее получим выражение для суммарного коэффициента жидкостного трения (демпфирования). Для этого приведем коэффициент жидкостного трения пружины, которая совершает линейное движение к вращательному движению вала двигателя. При этом будем считать, что сила жидкостного трения движущегося тела пропорциональна первой степени скорости его движения. На основании равенства мощности при ее передаче от поступательно движущегося тела вращательно движущемуся телу

$$M_{\text{ж.т}} \cdot \omega_{\text{дв}} = F_{\text{ж.т}} \cdot v_{\text{пр}};$$

$$\left( H'_{\text{пр}} \cdot \omega_{\text{дв}} \right) \cdot \omega_{\text{дв}} = \left( H_{\text{пр}} \cdot v_{\text{пр}} \right) \cdot v_{\text{пр}};$$

$$H'_{\text{пр}} = \frac{H_{\text{пр}} \cdot v_{\text{пр}}^2}{\omega_{\text{дв}}^2} = H_{\text{пр}} \cdot i^2.$$

Тогда

$$H_{\Sigma} = H_{\text{дв}} + H_{\text{ред}} + H'_{\text{пр}} =$$

$$= H_{\text{дв}} + H_{\text{ред}} + H_{\text{пр}} \cdot i^2, \quad (5)$$

где  $H_{\text{дв}}$ ,  $H_{\text{ред}}$ ,  $H_{\text{пр}}$  – коэффициенты жидкостного трения (демпфирования) от двигателя, редуктора и пружины соответственно.

Получим выражение для суммарного момента сухого трения (точнее, коэффициента сухого трения). Для этого приведем коэффициент сухого трения пружины, которая совершает линейное движение к вращательному движению вала двигателя. На основании равенства мощности при ее передаче от поступательно движущегося тела вращательно движущемуся телу

$$M_{\text{с.т}} \cdot \omega_{\text{дв}} = F_{\text{с.т}} \cdot v_{\text{пр}};$$

$$\left( M'_{\text{тр.пр}} \cdot \text{Sign } \omega_{\text{дв}} \right) \cdot \omega_{\text{дв}} = \left( F_{\text{тр.пр}} \cdot \text{Sign } v_{\text{пр}} \right) \cdot v_{\text{пр}};$$

$$M'_{\text{тр.пр}} = \frac{\left( F_{\text{тр.пр}} \cdot \text{Sign } v_{\text{пр}} \right) \cdot v_{\text{пр}}}{\text{Sign } \omega_{\text{дв}} \cdot \omega_{\text{дв}}} =$$

$$= \frac{F_{\text{тр.пр}} \cdot v_{\text{пр}}}{\omega_{\text{дв}}} = F_{\text{тр.пр}} \cdot i.$$

Следовательно,

$$M_{\text{тр}\Sigma} = M_{\text{тр.дв}} + M_{\text{тр.ред}} + M'_{\text{тр.пр}} =$$

$$= M_{\text{тр.дв}} + M_{\text{тр.ред}} + F_{\text{тр.пр}} \cdot i, \quad (6)$$

где  $M_{\text{тр.дв}}$ ,  $M_{\text{тр.ред}}$  – моменты сухого трения от двигателя и редуктора (точнее, коэффициенты сухого трения);  $F_{\text{тр.пр}}$  – сила сухого трения от пружины (точнее, коэффициент сухого трения).

Получим выражение для суммарного коэффициента жесткости. Для этого приведем коэффициент жесткости пружины, которая совершает линейное движение к вращательному движению вала двигателя. На основании равенства мощности при ее передаче от поступательно движущегося тела вращательно движущемуся телу

$$M_{\text{поз}} \cdot \omega_{\text{дв}} = F_{\text{поз}} \cdot v_{\text{пр}};$$

$$(C'_{пр} \cdot \Delta\varphi) \cdot \omega_{дв} = (C_{пр} \cdot \Delta S) \cdot v_{пр};$$

$$C'_{пр} = \frac{C_{пр} \cdot \Delta S \cdot v_{пр}}{\Delta\varphi \cdot \omega_{дв}} = C_{пр} \cdot i^2,$$

где  $\Delta S$  – величина линейного растяжения (сжатия) пружины, вызывающая поворот вала двигателя на величину  $\Delta\varphi$ .

Таким образом,

$$\begin{aligned} C_{\Sigma} &= C_{дв} + C_{ред} + C'_{пр} = \\ &= C_{дв} + C_{ред} + C_{пр} \cdot i^2, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $C_{дв}$ ,  $C_{ред}$ ,  $C_{пр}$  – коэффициенты жесткости двигателя, редуктора и пружины соответственно.

Электромагнитный момент двигателя представим аппроксимацией его механической характеристики полиномом вида

$$\begin{aligned} M_{эм} &= \alpha_1 \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \alpha_2 \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \\ &+ \alpha_3 \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^3 + \dots + \alpha_k \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^k, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  – постоянные коэффициенты, которые определяются из условия совпадения реальной механической характеристики двигателя и характеристики, аппроксимируемой выражением (8);  $k$  – степень полинома.

### Дифференциальное уравнение движения

Объединяя в уравнении (1) соотношения (2)...(8), запишем дифференциальное уравнение движения рассматриваемой автоколебательной системы для схемы на рис. 1:

$$\begin{aligned} J_{\Sigma} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + H_{\Sigma} \frac{d\varphi}{dt} + M_{тр\Sigma} \text{Sign} \frac{d\varphi}{dt} + \\ + C_{\Sigma} \varphi = \alpha_1 \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \alpha_2 \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \\ + \alpha_3 \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^3 + \dots + \alpha_k \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^k, \end{aligned}$$

где  $J_{\Sigma}$ ,  $H_{\Sigma}$ ,  $M_{тр\Sigma}$ ,  $C_{\Sigma}$  – коэффициенты, определенные выражениями (3)...(7).

Разделим обе части уравнения на  $C_{\Sigma}$ :

$$\begin{aligned} \frac{J_{\Sigma}}{C_{\Sigma}} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{H_{\Sigma}}{C_{\Sigma}} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \frac{M_{тр\Sigma}}{C_{\Sigma}} \cdot \text{Sign} \frac{d\varphi}{dt} + \varphi = \\ = \frac{\alpha_1}{C_{\Sigma}} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\alpha_2}{C_{\Sigma}} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{\alpha_3}{C_{\Sigma}} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^3 + \dots + \\ + \frac{\alpha_k}{C_{\Sigma}} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^k. \end{aligned}$$

### Приведение уравнения движения к канонической форме в относительных переменных

С целью получения возможности использовать для анализа уравнения известные классические методы запишем уравнения в относительных по времени переменных.

Введя замены

$$\tau = \omega_0 t; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}; \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi},$$

где  $\tau$  – относительное время;  $\dot{\varphi}$  – скорость вала двигателя;  $\ddot{\varphi}$  – ускорение вала двигателя;  $\omega_0$  – собственная частота колебаний автоколебательной системы, определяемая по выражению

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C_{\Sigma}}{J_{\Sigma}}},$$

представим уравнение движения в канонической форме:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_0^2} \cdot \omega_0^2 \cdot \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{H_{\Sigma}}{C_{\Sigma}} \cdot \omega_0 \cdot \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{M_{тр\Sigma}}{C_{\Sigma}} \times \\ \times \text{Sign} \left( \omega_0 \cdot \frac{d\varphi}{d\tau} \right) + \varphi = \frac{\alpha_1}{C_{\Sigma}} \cdot \omega_0 \times \\ \times \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{\alpha_2}{C_{\Sigma}} \cdot \omega_0^2 \cdot \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 + \frac{\alpha_3}{C_{\Sigma}} \cdot \omega_0^3 \times \\ \times \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^3 + \dots + \frac{\alpha_k}{C_{\Sigma}} \cdot \omega_0^k \cdot \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^k. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\ddot{\phi} + \phi = -\mu_2 \text{Sign}\dot{\phi} + (\mu_3 - \mu_1)\dot{\phi} + \mu_4\dot{\phi}^2 + \mu_5\dot{\phi}^3 + \dots + \mu_k\dot{\phi}^{k-2}, \quad (9)$$

где  $\mu_1, \dots, \mu_k$  – коэффициенты, определяемые по выражениям, представленным в табл. 1.

Уравнение (9) вместе с выражениями, представленными в табл. 1, является математической моделью описывающей работу стенда испытания упругих элементов, построенного по схеме на рис. 1.

Табл. 1. Выражения для определения коэффициентов, входящих в уравнение движения (9)

Коэффициент	Выражение	Коэффициент	Выражение
$\mu_1$	$\omega_0 H_\Sigma / C_\Sigma$	$\mu_4$	$\omega_0^2 \alpha_2 / C_\Sigma$
$\mu_2$	$M_{TP\Sigma} / C_\Sigma$	$\mu_5$	$\omega_0^3 \alpha_3 / C_\Sigma$
$\mu_3$	$\omega_0 \alpha_1 / C_\Sigma$	$\mu_k$	$\omega_0^{k-2} \alpha_{k-2} / C_\Sigma$

### Заключение

Впервые создана математическая модель стенда, предназначенного для динамических испытаний упругих элементов и построенного на основе автоколебательной электромеханической системы «асинхронный двигатель – пружина». Математическая модель представляет собой нелинейное диффе-

ренциальное уравнение движения (9) с постоянными коэффициентами, учитывающими параметры электросети, двигателя и нагрузки. Дальнейший анализ уравнения (9) позволит выявить взаимосвязь указанных параметров для условий запуска и устойчивой работы электропривода стенда в автоколебательном режиме.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рудченко, Ю. А. Проблемы теории и практики безредукторных электроприводов периодического движения / Ю. А. Рудченко, А. В. Козлов, А. А. Толстенков // Вестн. Белорус.-Рос. ун-т. – 2011. – № 4. – С. 129–137.
2. Грачев, С. А. Безредукторный электромашинный привод периодического движения / С. А. Грачев, В. И. Луковников. – Минск : Выш. шк., 1991. – 160 с.

Статья сдана в редакцию 8 июля 2013 года

**Юрий Александрович Рудченко**, канд. техн. наук, Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого. Тел.: +375-447-95-35-18.

**Андрей Владимирович Козлов**, канд. техн. наук, Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого. Тел.: +375-296-64-40-93. E-mail: avk78@list.ru.

**Yury Aleksandrovich Rudchenko**, PhD (Engineering), UO «P. O. Sukhoi Gomel State Technical University». Phone: +375-447-95-35-18.

**Andrei Vladimirovich Kozlov**, PhD (Engineering), UO «P. O. Sukhoi Gomel State Technical University». Phone: +375-296-64-40-93. E-mail: avk78@list.ru.