Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 9

МЕТЕОРОЛОГИЯ

В. А. ПУТОХИН

О ЗАПАСЕ ЭНЕРГИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ В ОБЛАСТИ МАЛОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ЦИКЛОНИЧЕСКОГО ТИПА

(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 26 I 1940)

Исследование энергетики циклонов приводит к вопросу об источниках их кинетической энергии. Первые исследователи этого вопроса (Hann, Hildebrandsson, Teisserence de Bort) считали главным источником кинетической энергии циклонов потенциальную энергию, связанную с наличием в атмосфере горизонтальных градиентов давления. Однако подсчеты, произведенные Маргулесом (1901) ([1]), показали, что запас потенциальной энергии распределения давления очень мал (в 80 раз меньше) по сравнению с кинетической энергией, имеющейся в циклоне. Энергию распределения давления Маргулес подсчитывал, как работу расширения, совершаемую частицами воздуха при переходе от заданного начального распределения давления к выравненному, т. е. такому, при котором горизонтальный градиент давления везде равен нулю, а по вертикали господствует равновесие.

Эти подсчеты были произведены при следующих упрощениях: 1) рассматриваемый объем воздуха изолирован от окружающей среды; 2) процессы и атмосфера изотермичны; 3) возмущение поля давления мало, т. е. мала величина $\varepsilon = \frac{p - \bar{p}}{\bar{p}}$, где p—давление в данной точке барического поля, $\bar{p}$—выравненное давление на высоте этой точки; 4) величина относительного возмущения давления ε не зависит от высоты; 5) поле давления имеет осевую симметрию; 6) трение и турбулентность не учитываются. Предположения 2) и 4) позволили Маргулесу считать отсутствующими вертикальные токи во время выравниванья давления, что сильно упростило подсчеты. Однако факты, известные современной метеорологии, говорят, что величину ε нельзя считать постоянной по высоте. Кошмидер ([2]) указывает, что ε по крайней мере до стратосферы можно предположить меняющейся с высотой обратно пропорционально давлению.

В настоящей работе сделана попытка повторить подсчеты Маргулеса, считая ε меняющейся по высоте. Метод Маргулеса к этому случаю неприменим, так как здесь нельзя считать вертикальные токи отсутствующими. Для того чтобы подсчитать работу расширения частицы воздуха, нужно знать, под каким давлением она находится в начальный и конечный моменты рассматриваемого процесса расширения, а для этого в данной задаче нужно знать, на какой высоте эта частица находится в момент выравнивания. Задача сводится к отысканию поля скоростей, т. е. к решению уравнений гидродинамики для данного частного случая. Однако, зная поле скоростей, можно непосредственно подсчитать кинетическую энергию для всей рассматриваемой массы воздуха и найти ее максимум по времени. Эта величина и дает ответ на вопрос: в какой степени кинетическая энергия циклона может быть объяснена за счет распределения давления.

Для выяснения этого вопроса мы решаем следующую задачу. В атмосфере выделяется вертикальный цилиндрический столб воздуха радиуса r_0, простирающийся от земли до верхней границы атмосферы; в начальный момент в нем задается поле давления, обладающее осевой симметрией $p = p(r, z)$. Все упрощающие предположения Маргулеса, перечисленные выше, сохраняются, за исключением предположения о постоянстве величины ε по высоте. В начальный момент система находится в покое, затем предоставляется самой себе и отыскивается дальнейшее ее движение.

В нашей кандидатской диссертации рассмотрен ряд задач такого вида; приведем результаты рассмотрения двух основных задач: 1) пространственная задача без учета силы Кориолиса, 2) пространственная задача с учетом силы Кориолиса.

Сила Кориолиса учитывается потому, что ее введение смещает положение равновесия, вокруг которого воздушные массы совершают колебания, когда система предоставлена самой себе. Без силы Кориолиса таким положением равновесия будет, очевидно, выравненное состояние. При наличии силы Кориолиса равновесие наступит, когда горизонтальные градиенты давления уравновесятся силой Кориолиса и центробежной силой. Смещение положения равновесия приведет к изменению скоростей воздушных масс в момент прохождения их через положение равновесия, а следовательно, должно изменить и максимальную величину кинетической энергии, которая может образоваться в рассматриваемом объеме.

Для случая, когда сила Кориолиса не учитывается (учитывая малость возмущения, изотермичность процессов и осевую симметрию поля давления), после некоторых преобразований можно написать уравнения движения и неразрывности в следующем виде (в цилиндрической системе координат):

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial r},$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - mP\right),$$

$$\frac{1}{p_0}\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} - mv_z = 0.$$

Здесь v_r и v_z—радиальная и вертикальная составляющие скорости, $P = e^{mz}\cdot p - p_0$; p_0 и ρ_0—давление и плотность в выравненном состоянии на поверхности земли; $m = \frac{g}{RT}$, где g—ускорение силы тяжести, R—газовая постоянная, T—абсолютная температура (постоянная, так как процессы и атмосфера изотермичны). Начальные условия: при $t = 0$ имеем $p = f(r, z)$, где $f(r, z)$—известная функция; $v_r = v_z = 0$.

Граничные условия: при $r = r_0$ имеем $v_r = 0$; $v_z = 0$ при $z = 0$ и при $z = h$; v_r, v_z, p конечны при $r = 0$.

Исключая v_r и v_z из написанной выше системы уравнений, получаем линейное уравнение для P:

$$\frac{\partial^2 P}{dr^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} - 2m\frac{\partial P}{\partial z} + m^2 P = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \text{ где } a^2 = \frac{p_0}{\rho_0},$$

которое решаем методом Фурье.

Затем строим выражения для v_r и v_z:

$$v_r = \frac{1}{a\rho_0} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} N_{k,n} \beta_k \frac{\sin a\,\lambda_{k,n} t}{\lambda_{k,n}} J_1(\beta_k r)\, e^{mz} \cos \frac{n\pi z}{h},$$

$$v_z = \frac{\pi}{a\rho_0 h} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} N_{k,n}\, n \frac{\sin a\,\lambda_{k,n} t}{\lambda_{k,n}} J_0(\beta_k r)\, e^{mz} \sin \frac{n\pi z}{h}.$$

Здесь $\beta_k = \frac{\mu_{1k}}{r_0}$, в частности $\beta_0 = \frac{\mu_{1_0}}{r_0} = 0$; $\lambda_{k,n}^2 = \beta_k^2 + \frac{\pi^2 n^2}{h^2}$; μ_{1k}—корень функции Бесселя 1-го порядка;

$$N_{k,n} = \frac{4}{h r_0^2 J_0^2(\mu_{1_k})} \int_0^h \int_0^{r_0} r J_0\left(\mu_{1k} \frac{r}{r_0}\right) \varphi(r, z) \cos \frac{n\pi z}{h}\, dr\, dz$$

(n меняется от 1 до ∞),

$$N_{k,0} = \frac{2}{h r_0^2 J_0^2(\mu_{1_k})} \int_0^h \int_0^{r_0} r J_0\left(\mu_{1k} \frac{r}{r_0}\right) \varphi(r, z)\, dr\, dz;$$ здесь $\varphi(r, z) = f(r, z) - p_0 e^{-mz}$.

Дальше интегрированием по массе столба M до высоты h получаем выражение для кинетической энергии K:

$$K = \int_M \frac{v_r^2 + v_z^2}{2}\, dM = \frac{\pi r_0^2 \rho_0 g}{2 p_0^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \cdot$$

$$\cdot \frac{N_{k,n} N_{k,j} \left[e^{mh}(-1)^{n+j} - 1\right] J_0^2(\mu_{1k}) \left[\beta_k^2 h^2 (m^2 h^2 + n^2\pi^2 + j^2\pi^2) + 2\pi^4 n^2 j^2\right]}{\left[m^2 h^2 + (n - j)^2 \pi^2\right]\left[m^2 h^2 + (n + j)^2 \pi^2\right]} \cdot$$

$$\cdot \frac{\sin a\lambda_{k,n} t}{\lambda_{k,n}} \frac{\sin a\,\lambda_{k,j} t}{\lambda_{k,j}}.$$

Во второй задаче, когда сила Кориолоса учитывается, уравнения движения и неразрывности имеют вид:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} - l v_\theta = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial r};$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + l v_r = 0,$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - mP\right),$$

$$\frac{1}{p_0} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} - m v_z = 0,$$

здесь $l = 2\omega_z$, где ω_z — вертикальная составляющая угловой скорости вращения земли, принимаемая в данной задаче постоянной. Начальные и граничные условия в этом случае те же, что и в предыдущем с добавлением: v_θ конечно при $r = 0$.

Ищем частные решения в виде:

$$v_r = \Phi_1(t) J_1(br) e^{mz} \cos dz,$$
$$v_\theta = \Phi_2(t) J_1(br) e^{mz} \cos dz,$$
$$v_z = \Phi_3(t) J_0(br) e^{mz} \sin dz,$$
$$P = \Phi_4(t) J_0(br) e^{mz} \cos dz,$$

где $\Phi_1(t) = \gamma_1 e^{\lambda t}$; $\Phi_2(t) = \gamma_2 e^{\lambda t}$; $\Phi_3(t) = \gamma_3 e^{\lambda t}$; $\Phi_4(t) = \gamma_4 e^{\lambda t}$.

Здесь γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, λ—постоянные, которые должны определиться после подстановки этих решений в данную систему уравнений; b и d—постоянные, определяемые из граничных условий.

Подставляя эти решения в систему дифференциальных уравнений, получаем систему алгебраических уравнений, из которых удается определить постоянные γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, λ с точностью до постоянного множителя, который находится из начальных условий. Используя начальные и граничные условия, после ряда преобразований получаем окончательные выражения для неизвестных функций и кинетической энергии. Эти выражения здесь не приведены вследствие их громоздкости.

Вопрос о сходимости получившихся здесь рядов разрешается положительно.

Пользуясь полученными формулами, мы рассчитали несколько конкретных примеров. Функция $f(r, z) = P_{t=0}$ выбиралась монотонно растущей от оси цилиндра к периферии. Таким образом поле давления в начальный момент задавалось циклонического типа. В каждой из задач было рассмотрено по два примера. В одном из них функция $f(r,z)$ задавалась такого вида, чтобы величина ε оставалась постоянной по высоте (для сравнения с Маргулесом), в другом—так, чтобы ε росла с высотой обратно пропорционально давлению (по Кошмидеру).

Результаты подсчетов (при $r_0 = 2 \cdot 10^5$ м, $p(r_0, 0) = 1033{,}6$ г/см^2 $= 101{,}3$ см/м^2, $h = 7 \cdot 10^3$ м).

I задача. 1) ε постоянна по высоте:

$$\max K = 25{,}86 \cdot 10^{14} \varepsilon^2 \text{кдж}.$$

По формулам Маргулеса в этом случае работа расширения $A = 24{,}96 \cdot 10^{14} \varepsilon^2$кдж, т. е. разница 4%.

2) ε растет с высотой обратно пропорционально давлению до высоты $h = 7$ км (при прочих равных условиях):

$$\max K = 59{,}6 \cdot 10^{14} \varepsilon^2 \text{кдж, т. е. в 2,3 раза больше.}$$

Для любого h может быть написано следующее приближенное соотношение:

$$\frac{\max K''}{\max K'} \approx \frac{h^2 g^2}{a^4 (1 - e^{-mh})^2},$$

где K''—кинетическая энергия при ε, растущей с высотой обратно пропорционально давлению до высоты h, K'—кинетическая энергия при ε, постоянной по высоте.

При $h = 7$ км $\dfrac{\max K''}{\max K'} = 2{,}26$; при $h = 15$ км $\dfrac{\max K''}{\max K'} = 4{,}92$.

II задача. Результаты в пределах точности вычислений совпадают с результатами подсчетов для I задачи.

Из изложенного выше могут быть сделаны следующие выводы:

1. Сила Кориолиса не оказывает заметного влияния на количество кинетической энергии, которое может образоваться за счет заданного распределения давления.

2. При ε, не меняющейся по высоте (случай Маргулеса), результаты подсчетов, проведенных здесь, совпадают с точностью до 4% с результатами подсчетов по формулам Маргулеса (несмотря на различие методов).

3. При ε, растущей с высотой обратно пропорционально давлению до высоты 7—15 км, количество кинетической энергии, которое может образоваться за счет данного распределения давления, превышает в 2—5 раз величину, полученную Маргулесом.

Таким образом количество кинетической энергии, которое может образоваться за счет энергии распределения давления, зависит от того, как меняется ε с высотой, но не настолько сильно, чтобы изменить основной вывод Маргулеса о том, что главный источник кинетической энергии циклона не следует искать в энергии распределения давления.

Московский гидрометеорологический институт

Поступило
31 I 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Margules, Über den Arbeitswert einer Luftdruckverteilung und über die Erhaltung der Druckunterschiede, Denkschriften Wiener Akad. Wiss., Math.-nat. Kl., 73 (1901). [2] Кошмидер, Динамическая метеорология, русское издание, стр. 332.