Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 8

МАТЕМАТИКА

Л. А. ЛЮСТЕРНИК

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 5 III 1940)

M. Morse([1]) исследовал конечномерные гомологии функциональных пространств допустимых линий вариационной задачи с фиксированными концами. Мы исследуем, пользуясь понятиями предыдущей нашей работы([2]), пересечения в этом пространстве.

Длина. Цикл z в конечномерном многообразии называется циклом длины l, если существует l циклов таких, что их пересечение с данным циклом негомологично нулю. Длиной многообразия называется наибольшая длина его циклов. Обобщим эти понятия на функциональные пространства.

Цикл z (конечно- или бесконечномерный) в линейном в малом пространстве M будем называть циклом конечной длины l, если в M существует l циклов $z_1, z_2, \ldots, z_l$ таких, что $z \times z_1 \times z_2 \times \ldots \times z_l \not\sim 0$ и не существует $(l+1)$ таких циклов. Цикл z будем называть циклом длины ∞, если для любого целого n найдется $m \geqslant n$ циклов $z_1, z_2, \ldots, z_m$ таких, что

$$z \times z_1 \times z_2 \times \ldots \times z_m \not\sim 0.$$

Если в пространстве M имеются циклы длины l, но нет циклов длины $(l+1)$, то мы скажем, что длина пространства M равна $(l+1)$. Если в пространстве M имеется цикл бесконечной длины или последовательность циклов конечных, но неограниченно возрастающих длин, то мы скажем, что пространство M имеет длину ∞.

Пространство $\mathfrak{M}_{ab}$. Будем рассматривать на двумерной сфере S_2 совокупность $\mathfrak{M}_{ab}$ всех дуг, соединяющих точки a и b этой сферы, причем мы наложим ограничение, что направление касательной и кривизна на этих дугах кусочно непрерывны. $\mathfrak{M}_{ab}$ есть совокупность допустимых линий вариационно задачи на ломаные экстремали с фиксированными концами. Определим метрику на этом функциональном пространстве так, как это обычно делается в вариационном исчислении (близость второго порядка).

Можно рассматривать $\mathfrak{M}_{ab}$, как линейное в малом пространство. Примеры линейных в малом функционалов на $\mathfrak{M}_{ab}$ дают рассматриваемые в вариационном исчислении вариации определенных на нем функционалов([4]).

В дальнейшем будем для простоты считать a и b диаметрально противоположными точками сферы S_2.

Пусть $c_1, c_2, \dots, c_n$—произвольные точки S_2. Обозначим через $T_n(c_1, c_2, \dots, c_n)$ совокупность всех дуг—элементов $\mathfrak{M}_{ab}$, которые, соединяя точки a и b, проходят при этом последовательно через точки $c_1, c_2, \dots, c_n$ в заданном порядке. Отметим, что изменение порядка прохождения точек c_i изменяет соответственное множество T_n. Например, $T_2(c_1, c_2)$ отлично от $T_2(c_2, c_1)$. Множества T_n являются $(\infty - n)$-мерными циклами на $\mathfrak{M}_{ab}$. Приняв теперь a и b за полюса сферы S_2, рассмотрим дугу, которую обозначим через $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$: эту дугу получим, если обойдем меридиан (половину большого круга) долготы φ_1, начиная от a до b, далее меридиан φ_2 от точки b до a и т. д., наконец, меридиан φ_n. При n нечетном $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ начинается в a и заканчивается в b, т. е. является элементом $\mathfrak{M}_{ab}$.

Обозначим теперь через D_n n-мерный тор-цикл на $\mathfrak{M}_{ab}$—именно при n нечетном D_n есть совокупность всех дуг $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ при всевозможных значениях циклических координат $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$; при n четном тор D_n состоит из всех дуг $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}^0)$ при фиксированной координате φ_{n+1}^0 и произвольных координатах $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ (введение дополнительного фиксированного меридиана необходимо для того, чтобы число дуг было нечетно, т. е. чтобы конец соответственной кривой находился в точке b).

Пусть $c_1, c_2, \dots, c_n$ суть точки сферы, отличные от a и b и лежащие на различных меридианах с долготами $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \dots, \varphi_n^0$; при n четном дополнительно потребуем, чтобы эти долготы не совпадали с фиксированной долготой φ_{n+1}^0. Пересечение $T_n(c_1, c_2, \dots, c_n) \times D_n$ есть один элемент пространства $\mathfrak{M}_{ab}$—именно дуга $(\varphi_1^0, \varphi_2^0, \dots, \varphi_n^0)$ при n нечетном и дуга $(\varphi_1^0, \varphi_2^0, \dots, \varphi_n^0, \varphi_{n+1}^0)$ при n четном. На основе результата предыдущей работы мы отсюда заключаем, что тор D_n не гомологичен нулю.

Теорема. *Пространство $\mathfrak{M}_{ab}$ имеет длину ∞. Для этого мы докажем, что длины циклов D_n стремятся к бесконечности при $n \to \infty$. Точнее, мы докажем, что длина D_n больше, чем $\lg_2 n$ и, в частности, длина $D_{2^k-1} \geqslant k$.*

Отметим сначала, что при $1 \leqslant i < 2^k$ биномиальные коэффициенты $\binom{2^k+i}{2^k}$ суть числа нечетные. В самом деле,

$$\binom{2^k+i}{2^k} = \binom{2^k+i}{i} = \frac{(2^k+1)(2^k+2)\dots(2^k+i)}{1.2\dots i} \tag{1}$$

при $1 \leqslant j \leqslant i < 2^k$ целые числа j и 2^k+j делятся на одну и ту же степень двойки; поэтому числитель и знаменатель дроби (1) делится на одну и ту же степень двойки и целое число—их частное есть число нечетное.

Отсюда, в частности, при $i = 2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 1 = 2^k - 1 < 2^k$,

$$\binom{2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 1}{2^k}$$

есть число нечетное.

Найдем теперь пересечение $T_n(c_1, c_2, \dots, c_n)$ и $T_m(d_1, d_2, \dots, d_m)$; это есть совокупность всех дуг из $\mathfrak{M}_{ab}$, проходящих в заданном порядке точки $c_1, c_2, \dots, c_n$ и в заданном же порядке точки $d_1, d_2, \dots, d_m$. При фиксированном порядке для точек $c_1, c_2, \dots, c_n$ и для точек $d_1, d_2, \dots, d_m$, $(n+m)$ точек $c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_m$ допускают $\binom{n+m}{m}$ перестановок, отличающихся друг от друга тем, как элементы d_i вставлены между элементами c_j. Например, фиксировав порядок для c_1, c_2 и для d_1, d_2, получим шесть перестановок:

$$c_1, c_2, d_1, d_2;\quad c_1, d_1, c_2, d_2;\quad c_1, d_1, d_2, c_2;\quad d_1, c_1, c_2 d_2;$$
$$d_1, c_1, d_2 c_2;\quad d_1, d_2, c_1, c_2.$$

Совокупность всех дуг из $\mathfrak{M}_{ab}$, обходящих заданные $(n+m)$ точек в фиксированном порядке, образует некоторый цикл T_{n+m}. Так как порядок обхода этих точек можно, как мы установили, менять $\binom{n+m}{m}$ способами, то $T_n \times T_m$ есть теоретико-множественная сумма $\binom{n+m}{m}$ множеств T_{n+m}. Например

$$T_2(c_1, c_2) \times T_2(d_1, d_2) = T_4(c_1, c_2, d_1, d_2) + T_4(c_1, d_1, c_2, d_2) +$$
$$+ T_4(c_1, d_1, d_2, c_2) + T_4(d_1, c_1, c_2, d_2) + T_4(d_1, c_1, d_2, c_2) + T_4(d_1, d_2, c_1, c_2);$$

мы это обозначим следующей записью:

$$T_n \times T_m = \binom{n+m}{m} T_{n+m}.$$

Повторяя предыдущие рассуждения, докажем, что

$$T_{n_1} \times T_{n_2} \times \ldots \times T_{n_k} = \binom{n_1+n_2}{n_2} \ldots$$
$$\ldots \binom{n_1+n_2+\ldots+n_k}{n_k} T_{n_1+n_2\ldots+n_k}$$

В частности,

$$T_1 \times T_2 \times T_4 \times \ldots \times T_{2^i} \times \ldots \times T_{2^{k-1}} = \binom{1+2}{2}\binom{1+2+4}{4} \ldots$$
$$\ldots \binom{1+2+\ldots+2^i}{2^i} \ldots \binom{1+2+\ldots+2^{k-1}}{2^{k-1}} T_{1+2+4+\ldots+2^{k-1}}. \quad (2)$$

В силу предыдущего все биномиальные коэффициенты в формуле (2), а значит, их произведения суть числа нечетные:

$$T_1 \times T_2 \times T_4 \times \ldots \times T_{2^{k-1}} = (2p+1)\, T_{1+2+4+\ldots+2^{k-1}} = (2p+1)\, T_{2^k-1}.$$

Рассмотрим теперь пересечение.

$$D_{2^k-1} \times T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_{2^{k-1}} = D_{2^k-1}(T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_{2^{k-1}}). \quad (3)$$

Пересечения, стоящие в скобках, есть теоретико-множественная сумма нечетного числа $(2p+1)$ циклов T_{2^k-1}. Каждый из этих циклов пересекается с D_{2^k-1} в одной точке, а значит, пересечение (3) есть совокупность нечетного числа $(2p+1)$ точек, т. е. *негомологично нулю*. По определению длины, D_{2^k-1} имея длину $\geqslant k$. Теорема доказана.

Аналогично же можно доказать, что функциональные пространства, составленные из дуг, соединяющих две точки на сфере любого числа измерений, имеют бесконечные длины.

Поступило
5 III 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Morse, Calculus of variations in the large. [2] Л. Люстерник, ДАН, XXVII, № 8 (1940).