Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 8

МАТЕМАТИКА

Л. А. ЛЮСТЕРНИК

ПЕРЕСЕЧЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ В МАЛОМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 5 III 1940)

Различные задачи анализа приводят к исследованию топологической структуры функциональных пространств, в частности к исследованию пересечений в таких пространствах.

Пересечения в линейных пространствах. Рассмотрим бесконечно мерное линейное пространство E. $(\infty-k)$-мерным подпространством называют совокупнось элементов $x\subset E$, удовлетворяющих k линейным уравнениям

$$f_1(x)=c_1,\ f_2(x)=c_2, \ldots, f_k(x)=c_k, \tag{1}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_k$—произвольные вещественные числа (при этом k элементов f_i из $\overline{E}$ линейно независимы). Далее, n-мерным линейным подпространством называют совокупность элементов $y\subset E$ вида:

$$y=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i+a_0. \tag{2}$$

Здесь λ_i—произвольные вещественные числа, a_i—заданные элементы E (притом линейно независимые).

$(n-1)$-мерное подпространство, расположенное в n-мерном, разбивает последнее на два полуподпространства, общей границей которых оно является.

Аналогично, если к условиям (1), определяющим $(\infty-k)$-мерное подпространство $E_{\infty-k}$, добавить условие

$$f_{k+1}(k)=c_{k+1}, \tag{3}$$

где f_{k+1}—линейный функционал, независимый от $f_1, \ldots, f_k$, то равенства (1) и (2) определят $(\infty-k-1)$-мерное подпространство $E_{\infty-k-1}$. Совокупность точек x, удовлетворяющих условиям (1) и дополнительно

$$f_{k+1}(x)\leqslant c_{k+1},$$

будем называть $(\infty-k)$-мерным полуподпространством, а $E_{\infty-k-1}$—его границей.

Пересечение двух линейных подпространств есть некоторое линейное подпространство. Мы скажем, что два линейных подпространства находятся в общем положении, если это пересечение имеет наименьшую из возможных размерностей, именно:

1) два конечно-мерных линейных подпространства вовсе не пересекаются;

2) пересечение линейных подпространств $\infty - k$ и $\infty - l$ измерений есть подпространство $\infty - k - l$ измерений;

3) подпространства $\infty - k$ и n измерений не пересекаются, если $n < k$; их пересечение есть подпространство $n - k$ измерений, если $n \geqslant k$. В частности, $\infty - n$-мерное и n-мерное подпространства пересекаются в одной точке.

Если два подпространства не находятся в общем положении, то путем сколь угодно малого изменения элементов, определяющих конечномерное подпространство, или функционалов, определяющих бесконечномерное в формулах (1) и (2), можно добиться того, чтобы они оказались в общем положении.

Линейные в малом пространства. Метрические функциональные пространства, которые применяются в анализе, являются большей частью линейными в малом. Пусть дано метрическое пространство M и линейное банаховское пространство E. Мы скажем: окрестность U_a точки a из M почти изометрично отображена на окрестность N_θ нулевого элемента θ из E, если это отображение гомеоморфно, переводит a в θ и если расстояние $\rho(b, b_1)$ двух элементов b и b_1 из U_a совпадает с точностью до величин высшего порядка малости сравнительно с $\rho(a, b) + \rho(a, b_1)$ с расстоянием их образов в N_θ. Пространство M называется линейным в малом, если достаточно малую окрестность U_a любого элемента a из M можно почти изометрически отобразить на окрестность N_θ нулевого элемента некоторого фиксированного банаховского пространства.

Пример. Рассмотрим совокупность $\mathfrak{M}$ всех замкнутых кривых на двумерной сфере (или плоскости) с непрерывной кривизной. За расстояние в пространстве $\mathfrak{M}$ можно принять, например, то, что в вариационном исчислении называется близостью первого или второго порядка. Возьмем произвольную кривую q из $\mathfrak{M}$.

Установив на кривой q порядок обхода, выбрав некоторую точку A_q за начальную, мы каждой точке B_q из q отнесем координату φ—длину дуги A_qB_q кривой q; φ есть циклическая координата с периодом l, равным длине q. В каждой точке A_q с координатой φ проведем отрезок нормаль t_φ длины ε с серединой в этой точке. При достаточно малом ε отрезки нормалей для близких значений φ не пересекаются. Рассмотрим теперь окрестность U_q (первого или второго порядка) кривой q. Любая кривая q_1 из U_q отсекает на нормали t_φ единственный отрезок алгебраической длины $\alpha(\varphi)$, где $|\alpha(\varphi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Таким образом кривой q_1 отвечает периодическая, дважды дифференцируемая функция $\alpha(\varphi)$ с периодом l. Обозначим через $\|\alpha(\varphi)\|$ наибольший максимум $|\alpha(\varphi)|$ и $|\alpha'(\varphi)|$ (или также и $\|\alpha''(\varphi)\|$). Далее, через B—линейное пространство всех периодических периода l, дважды дифференцируемых функций с такой нормой. Мы осуществили почти изометрическое отображение (в данном случае даже изометрическое) окрестности элемента q из $\mathfrak{M}$ на окрестность нулевого элемента B. $\mathfrak{M}$ есть линейное в малом пространство.

Все рассматриваемые в классическом вариационном исчислении функциональные пространства допустимых линий суть пространства, линейные в малом.

Рассмотрим почти изометрическое отображение $c = \alpha(d)$, где c—элемент U_a, d—соответственный элемент N_θ. Каждый функционал $f(c)$, определенный в U_a, индуцирует функционал $f_1(d) = f[\alpha^{-1}(c)]$ в N_θ. Если f_1 есть линейный функционал, то f называется почти линейным функционалом в U_a. Примерами почти линейных функционалов являются вариации в различных классических вариационных задачах.

Линейные в малом многообразия. Пусть в окрестности U_a точки a пространства M определены n линейно независимых линейных (в малом) функционалов $f_1, f_2, \ldots, f_n$, причем $f_i(a)=0$, $i=1, 2, \ldots, n$. Совокупность точек x из U_a, определенных условиями $f_i(x)=0$, $i=1, 2, \ldots, n$, называется линейным в малом $(\infty-n)$-мерным элементом. При почти изометрическом отображении U_a на N_θ, $(\infty-n)$-мерный линейный в малом элемент переходит в окрестность θ в некотором проходящем через θ $(\infty-n)$-мерном линейном подпространстве.

Аналогично $(\infty-n)$-мерный линейный в малом полуэлемент определяется равенствами $f_1(x)=f_2(x)=f_n(x)=0$, $f_{n+1}(x)\leqslant 0$, где $f_1, f_2, \ldots, f_n$, f_{n+1}—линейные в малом функционалы в U_a, причем $f_i(a)=0$, $i=1, 2, \ldots, n+1$. Точка a называется граничной точкой такого элемента.

Сложным $(\infty-n)$-мерным элементом в U_a мы назовем совокупность конечного k числа в линейных в малом $(\infty-n)$-мерных элементов, пересекающихся по $\infty-kn$-мерному элементу.

Непустое множество P в пространстве M мы назовем $(\infty-n)$-мерным многообразием, если для любой точки a из M и достаточно малой ее окрестности U_a. P есть $(\infty-n)$-мерный линейный элемент или полуэлемент, или сложный $(\infty-n)$-мерный элемент или пустое множество.

Пример. Совокупность $\mathfrak{M}_a$ всех кривых из $\mathfrak{M}$, проходящих через данную точку a сферы, образует $(\infty-1)$-мерный элемент.

Точка a из P называется граничной для P, если она есть граничная для полуэлемента $U_a \times P$. Совокупность граничных точек многообразия P есть $(\infty-n-1)$-мерное многообразие $\overline{P}$, называемое границей P. Многообразие P без границы называется $(\infty-n)$-мерным дифференцируемым циклом.

Пример. Множество $\mathfrak{M}_a$ есть $(\infty-1)$-мерный дифференцируемый цикл на $\mathfrak{M}$.

Наряду с бесконечно-мерными будем рассматривать и конечно-мерные линейные в малом (притом компактные) многообразия и циклы (многообразия без границ). n-мерный цикл будем называть гомологичным нулю, если он является границей $(n+1)$-мерного многообразия (дифференцируемые гомологии).

Пересечения многообразий. Два многообразия, линейные в малом, находятся в общем положении в окрестности U_a точки a, если при отображении U_a в N_θ соответственные линейные подпространства находятся в общем положении. Если два многообразия находятся в общем положении в окрестности каждой точки, мы скажем, что они находятся в общем положении. Предполагая, что пересекающиеся многообразия находятся в общем положении, получаем:

1) пересечение $(\infty-k)$- и $(\infty-n)$-мерных многообразий есть $(\infty-k-n)$-мерное многообразие;

2) пересечение $(\infty-k)$-мерного и n-мерного многообразия есть $(n-k)$-мерное многообразие при $n\geqslant k$ и пусто при $n<k$;

3) два конечно-мерных многообразия не пересекаются.

Повторяя обычные рассуждения, получим две важные теоремы:

Теорема 1. *Пересечение циклов есть цикл.*

Теорема 2. *Пересечение n-мерного цикла, гомологичного нулю, с любым циклом гомологично нулю (или пусто).*

Из теоремы 2 следует важный критерий негомологичности нулю конечно-мерных циклов: если n-мерный цикл L_n в пересечении с $(\infty-k)$-мерным циклом дает негомологичный нулю $(n-k)$-мерный цикл, то L_n негомологично нулю.

Поскольку нечетное число точек представляет негомологичный нулю нульмерный цикл, то пересечение L_n с $(\infty - n)$-мерным циклом по нечетному числу (например, по одной точке) гарантирует негомологичность L_n нулю.

Пример. Рассмотрим в $\mathfrak{M}$ $(\infty - 1)$-мерный цикл $\mathfrak{M}_a$ всех линий из $\mathfrak{M}$, проходящих через точку a сферы, и одномерный цикл L_1, состоящий из всех больших кругов, проходящих через пару диаметрально противоположных точек c и d сферы. Пусть c и d отличны от a. Пересечение $\mathfrak{M}_a \times L_1$ есть одна точка—именно, большой круг, проходящий через a, c и d. Отсюда следует негомологичность нулю цикла L_1 на $\mathfrak{M}$.

Поступило
5 III 1940