Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 9

МАТЕМАТИКА

А. С. СОКОЛИН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РАДО

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 4 II 1940)

Tibor Radó в письме к Серпинскому, опубликованном последним в 1928 г. (1), высказал в виде гипотезы следующее предложение:

Пусть в плоскости xy расположена конечная система произвольных квадратов, стороны которых параллельны осям x, y; площадь, покрываемая этой системой, равна S. Часть этих квадратов можно выбросить так, что оставшиеся не будут иметь ни одной общей точки и будут покрывать площадь $S' \geqslant \frac{1}{2^2} S$.

Это предложение легко обобщается на n-мерное пространство.

Ниже мы предлагаем доказательство теоремы, которая является частным случаем обобщенной задачи Radó:

В n-мерном пространстве $xyz \ldots u$ расположена конечная система равновеликих n-мерных кубов, ребра которых параллельны осям $x, y, z, \ldots, u$; объем этой системы равен V. Часть этих кубов можно выбросить так, что оставшиеся не будут иметь ни одной общей точки и будут иметь объем $V' \geqslant \frac{1}{2^n} V$.

Доказательство проведем в плоскости.

1. Мы будем опираться на теорему Blichfeldt'a (2):

Область с площадью S, лежащую в плоскости с единичной квадратной решеткой, всегда можно перенести параллельно самой себе так, что ею покроется $k \geqslant \overline{S}$ точек решетки. (Символом $\overline{S}$ мы обозначим ближайшее целое справа от S.)

Напомним ее доказательство (по Birkhof'y).

Прямые целочисленной сети, узлы которой представляют собой заданную точечную решетку, разбивают нашу область на q частей $A_1, A_2, \ldots, A_q$, лежащих в квадратах $R_1, R_2, \ldots, R_q$. Параллельным переносом совместим эти квадраты вместе с частями A с одним из квадратов сети, например с квадратом R_1. Тогда существует по крайней мере одна точка a квадрата R_1, принадлежащая одновременно $k \geqslant \overline{S}$ частям A, ибо, предположив противное, получим, что площадь нашей области $S \leqslant \overline{S} - 1 < S$.

Пусть a_i—точка части A_i, которая после переноса совпала с точкой a квадрата R_1. Очевидно, что k точек a_i являются точками квадратной решетки, расположенной параллельно заданной решетке.

2. Если в плоскости с единичной квадратной решеткой расположена конечная система равных квадратов со сторонами 1 так, что стороны этих квадратов параллельны сторонам квадратов решетки, то эту систему, представляющую собой область Q с площадью S, всегда можно перенести параллельно самой себе так, что ею покроется $k \geqslant \overline{S}$ точек решетки, из которых ни одна не попадет на стороны квадратов.

Действительно, выберем некоторую область Q' с площадью $S'' > \overline{S}-1$, целиком лежащую на области Q, и контур которой не имеет ни одной общей точки с контуром области Q. По теореме Blichfeldt'а область Q вместе с Q' можно перенести параллельно самой себе так, что областью Q' покроется $k \geqslant \overline{S}$ точек решетки. Пусть при этом на стороны квадратов попали некоторые точки решетки. Тогда, в результате достаточно малого сдвига области Q в любом направлении, не параллельном сторонам квадратов, мы получим, что все точки решетки, лежащие на сторонах квадратов, сойдут с них, и ни одна из точек решетки не попадет на стороны квадратов и не сойдет с области Q.

3. Из любых k точек единичной квадратной решетки можно выбрать $k' \geqslant \frac{1}{2^2} k$ точек, наименьшее расстояние между которыми $r \geqslant 2$.

В самом деле, разобьем заданные k точек на классы так, чтобы в каждый класс входили все точки, для которых выполняется условие:

$$x \equiv x_1 \pmod 2,$$
$$y \equiv y_1 \pmod 2.$$

Таких классов будет 2^2. Очевидно, что в каждом классе наименьшее расстояние между двумя любыми точками $r \geqslant 2$. По крайней мере один класс будет содержать в себе $k' \geqslant \frac{1}{2^2} k$ точек.

4. Итак, пусть в плоскости xy расположена конечная система единичных квадратов, стороны которых параллельны осям x, y; площадь, покрываемая этой системой, равна S.

Построив в плоскости xy единичную точечную решетку, параллельную осям x, y, перенесем систему параллельно самой себе так, чтобы ею покрылось $k \geqslant \overline{S}$ точек решетки, не лежащих на сторонах квадратов. Из этих k точек выберем $k' \geqslant \frac{1}{2^2} k$ точек решетки, наименьшее расстояние между которыми $r \geqslant 2$. Тогда k' квадратов, каждый из которых заключает внутри себя по одной из k' выбранных точек, не имеют между собой ни одной общей точки и площадь, покрываемая ими, $S' = k' \geqslant \frac{1}{2^2} S$.

Ленинградский государственный университет

Поступило
5 II 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Tibor Radó, Sur un problème relatif à un théorème de Vitali, Fund. math., XI. [2] H. F. Blichfeldt, Trans. Amer. Mat. Soc., XV (1914).