Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 9

МАТЕМАТИКА

М. НАЙМАРК

О КВАДРАТЕ ЗАМКНУТОГО СИММЕТРИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 9 II 1940)

Как известно, если H—максимальный или гипермаксимальный (самосопряженный) оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, то любая степень H^k, $k=1, 2, 3, \ldots$, определена на линейном многообразии, плотном в $\mathfrak{H}$. Возникает вопрос, не будет ли это свойство иметь место и для любого замкнутого симметрического оператора *. В настоящей заметке я показываю, что существуют замкнутые симметрические операторы H, квадрат которых имеет область определения, не плотную в $\mathfrak{H}$. Кроме того я даю условия, необходимые и достаточные для того, чтобы область определения оператора H^2 была плотной в $\mathfrak{H}$. Отмечу еще, что всюду в этой работе $\mathfrak{H}$ необязательно сепарабельно.

Лемма. *Пусть H—замкнутый симметрический оператор в $\mathfrak{H}$; тогда H^2 замкнут.*

Пусть ** $f_n \in \mathfrak{D}(H^2)$, $f_n \to f_0$, $H^2 f_n \to g_0$; тогда $|f_n| < C$, где C—некоторая константа, а поэтому $|Hf_n - Hf_m|^2 = (H^2(f_n - f_m), f_n - f_m) < 2C|H^2 f_n - H^2 f_m| \to 0$ при $n, m \to \infty$.

Пусть $h_0 = \lim\limits_{n\to\infty} Hf_n$; в силу замкнутости H, $Hf_0 = h_0$. Но тогда из $Hf_n \to Hf_0$, $H(Hf_n) \to g_0$ следует, что $Hf_0 \in \mathfrak{D}(H)$, $H(Hf_0) = g_0$, так что H^2 замкнут.

Теорема 1. *Для того чтобы квадрат H^2 замкнутого симметрического оператора H был определен на многообразии, плотном в $\mathfrak{H}$, необходимо и достаточно, чтобы H^{*2} допускал замыкание. В этом случае *** $(H^2)^* = \widetilde{H^{*2}}$.*

Пусть $\mathfrak{D}(H^2)$ плотно в $\mathfrak{H}$; тогда $(H^2)^*$—замкнутый оператор и $\overline{\mathfrak{D}(H^{2*})} = \mathfrak{H}$ [см. (2), теорема 2].

Кроме того

$$(H^2)^* \supset H^* H^* = H^{*2}, \tag{1}$$

следовательно, H^{*2} допускает замыкание.

Пусть, обратно, H^{*2} допускает замыкание. Так как $H^{*2} \supset H^* H$, то $\overline{\mathfrak{D}(H^{*2})} \supset \overline{\mathfrak{D}(H^* H)} = \mathfrak{H}$ [см. (2), теорема 3]. Поэтому $(H^{*2})^*$ также опреде-

* По поводу терминологии см. (1).
** $\mathfrak{D}(A)$—область определения оператора A.
*** A обозначает замыкание оператора A.

лен на плотном в $\mathfrak{H}$ многообразии. С другой стороны, из $H^{*2} \supset H^*H$, $H^{*2} \supset HH^*$ следует, что

$$(H^{*2})^* \subset H^*H, \tag{2}$$

$$(H^{*2})^* \subset HH^*. \tag{3}$$

Пусть $f \in \mathfrak{D}((H^{*2})^*)$; в силу (2), $f \in \mathfrak{D}(H^*H) \subset \mathfrak{D}(H)$ и $(H^{*2})^* f = H^*Hf$. В силу (3), $f \in \mathfrak{D}(HH^*)$ и

$$(H^{*2})^* f = HH^* f. \tag{4}$$

Но так как $f \in \mathfrak{D}(H)$, то $H^*f = Hf$, так что (4) перепишется в виде $(H^{*2})^* f = H^2 f$. Отсюда

$$H^2 \supset (H^{*2})^*, \tag{5}$$

так что $\mathfrak{D}(H^2)$ плотно в $\mathfrak{H}$. Но тогда имеет место (1); применяя $*$ к обеим частям (1), получаем $H^2 \subset (H^{*2})^*$; отсюда, в силу (5), $H^2 = (H^{*2})^*$, $(H^2)^* = (H^{*2})^{**} = \widetilde{H^{*2}}$.

Теорема 2. *Для того чтобы квадрат H^2 замкнутого симметрического оператора H был определен на плотном в $\mathfrak{H}$ многообразии, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathfrak{D}(H^*H) \cdot \overline{(\mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+)} = (0), \tag{6}$$

где $\mathfrak{M}^- = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{R}(H - i1)$, $\mathfrak{M}^+ = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{R}(H + i1)$—дефектные подпространства H.*

Пусть $\mathfrak{D}(H^2) = \mathfrak{H}$; тогда H^{*2} допускает замыкание. Положим $A = \widetilde{H^{*2}}$. Пусть $f \in \mathfrak{D}(H^*H) \cdot \overline{(\mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+)}$; так как на $\mathfrak{M}^-$ и на $\mathfrak{M}^+$ $Ag = -g$, то, в силу замкнутости A, $Af = -f$. С другой стороны, так как $f \in \mathfrak{D}(H^*H)$, то $-f = Af = H^*Hf$. В силу позитивности H^*H, отсюда следует, что $f = 0$.

Пусть, обратно, условие (6) выполнено. Если $f \in \mathfrak{D}(H^{*2})$, то $f \in \mathfrak{D}(H^*)$, следовательно, $f = h + \varphi + \psi$, $h \in \mathfrak{D}(H)$, $\varphi \in \mathfrak{M}^-$, $\psi \in \mathfrak{M}^+$ и $H^*f = Hh - i\varphi + i\psi$. Но $-i\varphi$, $i\psi \in \mathfrak{D}(H^*)$, поэтому и $Hh \in \mathfrak{D}(H^*)$, т. е. $h \in \mathfrak{D}(H^*H)$. Кроме того $H^{*2}f = H^*Hh - \varphi - \psi$. Определим оператор A на $\mathfrak{D}(H^*H) + \overline{+(\mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+)}$ равенством $A(h+g) = H^*Hh - g$, $h \in \mathfrak{D}(H^*H)$, $g \in \overline{\mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+}$. Очевидно, $A \supset H^{*2}$ и, в силу теоремы 1, достаточно доказать, что A замкнут. Пусть $h_n + g_n \to f_0$, $h_n \in \mathfrak{D}(H^*H)$, $g_n \in \overline{\mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+}$ и

$$A(h_n + g_n) = H^*Hh_n - g_n \to k_0.$$

Тогда $H^*Hh_n + h_n \to f_0 + k_0$ и, в силу ограниченности $(H^*H + 1)^{-1}$, $h_n \to h_0$, где $h_0 = (H^*H + 1)^{-1}(f_0 + k_0)$. Очевидно, $h_0 \in \mathfrak{D}(H^*H)$; кроме того, полагая $g_0 = f_0 - h_0$, имеем $g_0 = \lim_{h \to \infty}(h_n + g_n - h_n) \in \overline{\mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+}$. Отсюда $f_0 = h_0 + g_0 \in \mathfrak{D}(A)$, $Af_0 = H^*Hh_0 - g_0 = (H^*H + 1)h_0 - f_0 = k_0 + f_0 - f_0 = k_0$, так что A—замкнутый оператор.

Теорема 3. *Пусть H—замкнутый симметрический оператор в $\mathfrak{H}$. Для того чтобы оператор H^{*2} был замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы линейная сумма $\mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+$ дефектных подпространств H была замкнутой, следовательно, чтобы для любых $\varphi \in \mathfrak{M}^-$, $\psi \in \mathfrak{M}^+$ и некоторой константы C выполнялось неравенство*

$$|\varphi + \psi| > C|\varphi| \quad (\textit{или} \ \ |\varphi + \psi| > C|\psi|). \tag{7}$$

В этом случае $\overline{\mathfrak{D}(H^2)} = \mathfrak{H}$ и $(H^2)^* = H^{*2}$.

---

* $\mathfrak{R}(A)$ обозначает область изменения оператора A.

Пусть H^{*2} замкнут; тогда совокупность $\mathfrak{M}^-$ векторов f, удовлетворяющих условию $H^{*2}f = -f$, замкнута. С другой стороны, из $H^{*2}f = -f$ следует

$$(H^* + i1)(H^* - i1)f = (H^* - i1)(H^* + i1)f = H^{*2}f + f = 0,$$

так что

$$(H^* - i1)f \in \mathfrak{M}^+, \ (H^* + i1)f \in \mathfrak{M}^-, \ f = \frac{1}{2i}[(H^* + i1)f - (H^* - i1)f] \in \mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+.$$

Таким образом $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+$, следовательно, $\mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+$ замкнуто.

Обратно, если $\mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+$ замкнуто, то $\mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+ = \overline{\mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+}$; поэтому замкнутый оператор A, построенный в доказательстве теоремы 2, совпадает с H^{*2}; H^{*2} замкнут. Согласно теореме 1 $\overline{\mathfrak{D}(H^2)} = \mathfrak{H}$ и

$$(H^2)^* = \widetilde{H^{*2}} = H^{*2}.$$

С другой стороны, для замкнутости $\mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+$ необходимо и достаточно выполнение (7). Достаточность (7) очевидна, ибо $\mathfrak{M}^-$, $\mathfrak{M}^+$ замкнуты. Обратно, если $\mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+$ замкнуто, то, полагая $(\varphi + \psi, \varphi' + \psi')_1 = (\varphi, \varphi') + (\psi, \psi')$; $\varphi, \varphi' \in \mathfrak{M}^-$; $\psi, \psi' \in \mathfrak{M}^+$, мы получим, что $\mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+$ полно относительно $|f|_1 = \sqrt{(f, f)_1}$. Кроме того очевидно, что из сходимости по $|f|_1$ следует сходимость по $|f|$; согласно известной теореме Банаха ([3]) отсюда следует, что при некотором C

$$|\varphi + \psi|^2 > C^2 |\varphi + \psi|_1^2 = C^2(|\varphi|^2 + |\psi|^2), \quad \varphi \in \mathfrak{M}^-, \quad \psi \in \mathfrak{M}^+.$$

Следствие. *Если хотя бы одно из дефектных подпространств $\mathfrak{M}^-$, $\mathfrak{M}^+$ замкнутого симметрического оператора H конечномерно, то H^2 определен на многообразии, плотном в $\mathfrak{H}$ и $(H^2)^* = (H^*)^2$.*

Если $\mathfrak{M}^-$ или $\mathfrak{M}^+$ конечномерно, то $\mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+$ замкнуто [см., например ([4]), лемма 6]; остается применить теорему 3.

Построим теперь пример замкнутого симметрического оператора H, квадрат которого имеет область определения, не плотную в $\mathfrak{H}$. Для этой цели выберем последовательность $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k < 1$ такую, что $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^2 < +\infty$. Пусть $\mathfrak{H}$—сепарабельное гильбертово пространство, а $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$—полная ортонормальная система в $\mathfrak{H}$; положим

$$\psi_k = \varepsilon_k \varphi_{2k-1} - \sqrt{1 - \varepsilon_k^2}\, \varphi_{2k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Пусть, далее, $\mathfrak{M}_1 = \{\varphi_2, \varphi_4, \varphi_6 \ldots\}$, $\mathfrak{M}_2 = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots\}$—замкнутые подпространства, построенные на $\varphi_2, \varphi_4, \varphi_6, \ldots$ и $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ соответственно. Очевидно, ψ_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$—полная ортонормальная система в $\mathfrak{M}_2$; далее, очевидно, что $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ содержит все φ_k, так что

$$\overline{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2} = \mathfrak{H}.$$

С другой стороны, полагая $f = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \varphi_{2k-1}$, мы имеем $f \in \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}_1$, $f \overline{\in} \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$. В самом деле, если бы было $f = g + h$, $g \in \mathfrak{M}_1$, $h \in \mathfrak{M}_2$, то, разлагая g и h по $\{\varphi_{2k}\}$, $\{\psi_k\}$, мы имели бы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \varphi_{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (\varepsilon_k \varphi_{2k-1} - \sqrt{1 - \varepsilon_k^2}\, \varphi_{2k}),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2 < +\infty,$$

отсюда $\varepsilon_k = \varepsilon_k \beta_k$, $\beta_k = 1$, что противоречит условию $\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2 < +\infty$. Итак, $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 \neq \mathfrak{H}$ и

$$(\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}_1)(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) \neq \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}_1. \tag{8}$$

Положим теперь $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}_2$; очевидно,

$$\mathfrak{N}_1 = \{\varphi_1, \varphi_3, \varphi_5, \ldots\}, \quad \mathfrak{N}_2 = \{g_1, g_2, g_3, \ldots\},$$

где $g_k = \sqrt{1 - \varepsilon_k^2}\, \varphi_{2k-1} + \varepsilon_k \varphi_{2k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Построим изометрическое отображение U пространства $\mathfrak{N}_1$ на $\mathfrak{N}_2$, полагая $U\varphi_{2k-1} = g_k$; $k = 1, 2, 3, \ldots$, и докажем, что для любого $f \in \mathfrak{N}_1$

$$Uf - f \in \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2. \tag{9}$$

В самом деле, полагая $f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_{2k-1}$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < +\infty$, подберем β_k и γ_k так, чтобы

$$Uf - f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left[\left(\sqrt{1 - \varepsilon_k^2} - 1\right) \varphi_{2k-1} + \varepsilon_k \varphi_{2k}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \varphi_{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \left[\varepsilon_k \varphi_{2k-1} - \sqrt{1 - \varepsilon_k^2}\, \varphi_{2k}\right].$$

Для этого надо, чтобы $\alpha_k \left(\sqrt{1 - \varepsilon_k^2} - 1\right) = \gamma_k \varepsilon_k$, $\alpha_k \varepsilon_k = \beta_k - \gamma_k \sqrt{1 - \varepsilon_k^2}$. Отсюда $\gamma_k = \alpha_k \left(\sqrt{1 - \varepsilon_k^2} - 1\right) \varepsilon_k^{-1}$, $\beta_k = \alpha_k \varepsilon_k + \gamma_k \sqrt{1 - \varepsilon_k^2}$ и очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^2 < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2 < +\infty.$$

Рассмотрим теперь $L_1 = \mathfrak{N}_1 (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)$; в силу (8), $L_1 \neq \mathfrak{N}_1$, а так как L_1 содержит все φ_{2k-1}, то $\overline{L}_1 = \mathfrak{N}_1$. Всякий элемент $f \in L_1$ однозначно представим в виде $f = g + h$, $g \in \mathfrak{M}_1$, $h \in \mathfrak{M}_2$; положим для $f_1, f_2 \in L_1$

$$f_1 = g_1 + h_1; \quad f_2 = g_2 + h_2; \quad g_1, g_2 \in \mathfrak{M}_1; \quad h_1, h_2 \in \mathfrak{M}_2;$$

$$(f_1, f_2)_1 = 2(g_1, g_2) + 2(h_1, h_2).$$

Легко видеть, что $|f|_1 \geqslant |f|$ и L_1 полно относительно $|f|_1$; поэтому L_1 есть H-многообразие в $\mathfrak{N}_1$ [см. ([5]), теорема 1].

Пусть H_1—самосопряженный оператор в $\mathfrak{N}_1$, с областью определения $\mathfrak{D}(H_1) = L_1$. Согласно теореме Неймана ([6]) существует в $\mathfrak{N}_1$ самосопряженный оператор H_2 такой, что

$$\mathfrak{D}(H_2) \cdot L_1 = (0). \tag{10}$$

Пусть U_2—трансформация Кели H_2; тогда U_2—унитарный оператор в $\mathfrak{N}_1$ и из

$$U_2 \varphi - \varphi = 0 \quad \text{следует } \varphi = 0. \tag{11}$$

Положим $V = UU_2$; V — изометрическое отображение $\mathfrak{N}_1$ на $\mathfrak{N}_2$ и, в силу $\mathfrak{N}_1 \cdot \mathfrak{N}_2 = (0)$, равенство $V\varphi - \varphi = 0$ возможно только при $\varphi = 0$. Поэтому V можно рассматривать как трансформацию Кели некоторого замкнутого эрмитового оператора H [см., например ([7]), лемма 1]. Очевидно, дефектными подпространствами H будут $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$. Далее, $\mathfrak{D}(H)$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ линейно независимы. В самом деле, пусть $f + \varphi + \psi = 0$, $f \in \mathfrak{D}(H)$, $\varphi \in \mathfrak{M}_1$, $\psi \in \mathfrak{M}_2$; так как $f = Vh - h$, $h \in \mathfrak{N}_1$, то мы получим, что $f = UU_2h - h = UU_2h - U_2h + U_2h - h$, следовательно, полагая $g = U_2h - h$, имеем $g = U_2h - h = -[\varphi + \psi + UU_2h - U_2h]$.

Но $g = U_2h - h \in \mathfrak{D}(H_2) \subset \mathfrak{N}_1$ и, в силу (9), $UU_2h - U_2h \in \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$, $\varphi + \psi \in \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$; поэтому

$$g \in \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2, \quad g \in \mathfrak{N}_1 (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) = L_1, \quad g \in \mathfrak{D}(H_2)\, L_1 = (0), \quad g = 0.$$

Но тогда, в силу (11), $h = 0$, $f = Vh - h = 0$, $\varphi + \psi = 0$. Так как $\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2 = (0)$, то $\varphi = \psi = 0$. Итак, $\mathfrak{D}(H)$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ линейно независимы; согласно теореме 8 в ([7]) отсюда следует, что $\mathfrak{D}(H)$ плотно в $\mathfrak{H}$, так что H — замкнутый симметрический оператор в $\mathfrak{H}$ с дефектными подпространствами $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$. В силу

$$\mathfrak{D}(H^*H)\,(\overline{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}) = \mathfrak{D}(H^*H) \cdot \mathfrak{H} = \mathfrak{D}(H^*H) \neq (0),$$

условие теоремы 2 для H не выполнено, так что $\mathfrak{D}(H^2)$ неплотно в $\mathfrak{H}$.

В случае несепарабельного пространства $\mathfrak{H}_0$ достаточно, например, расщепить $\mathfrak{H}_0$ на взаимно ортогональные сепарабельные подпространства и построить в каждом из них оператор, изометрический H. Мы получим тогда замкнутый симметрический оператор H_0 в $\mathfrak{H}_0$ такой, что $\mathfrak{D}(H_0^2)$ не плотно в $\mathfrak{H}_0$.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академия Наук СССР
Москва

Поступило
9 II 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. H. Stone, Linear Transformations in Hilbert Space, New York (1932). [2] J. v. Neumann, Annals of Math., **33**, 294—310 (1932). [3] St. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, глава III, § 3, теорема 6 (1932). [4] Ф. Рисс, Успехи матем. наук, вып. 1, стр. 182, лемма 6 (1936). [5] М. А. Наймарк, Известия Акад. Наук СССР, серия матем., № 2, 165—180 (1939). [6] J. v. Neumann, Journ. f. reine и angew. Math., **161**, стр. 232, теорема 18 (1929). [7] М. А. Наймарк, Известия Акад. Наук СССР, серия матем., № 1 (1940).