Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 9

МАТЕМАТИКА

Д. А. РАЙКОВ

О ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЯХ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 14 I 1940)

В настоящей заметке устанавливается общий необходимый и достаточный признак компактности множества характеристических функций и с его помощью дается вывод из соответствующих теорем для положительно определенных последовательностей, теоремы Бохнера [1] о представлении непрерывных функций, положительно определенных на всей прямой, и теоремы Крейна [2] о возможности продолжения функций, положительно определенных на конечном отрезке, с сохранением положительной определенности на всю прямую.

§ 1. Последовательность функций $f_n(x)$ назовем равностепенно непрерывной в некотором (конечном или бесконечном) интервале изменения x, если для всякого $\varepsilon > 0$ существуют такие $n(\varepsilon)$ и $h(\varepsilon)$, что для всех $n > n(\varepsilon)$ и $|h| < h(\varepsilon)$ во всем рассматриваемом интервале выполняется неравенство $|f_n(x+h) - f_n(x)| < \varepsilon$. Аналогично, последовательность $f_n(x)$ назовем равностепенно непрерывной в точке x_0, если для всякого $\varepsilon > 0$ существуют такие $n(\varepsilon)$ и $h(\varepsilon)$, что для всех $n > n(\varepsilon)$ и $|h| < h(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f_n(x_0+h) - f_n(x_0)| < \varepsilon$.

Множество функций мы будем называть равностепенно непрерывным (в точке или в интервале), если равностепенно непрерывна каждая выбранная из него последовательность.

Множество характеристических функций * мы будем называть компактным, если из любой содержащейся в нем последовательности можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся равномерно на каждом конечном интервале. Как известно [3], тогда предельные функции также будут характеристическими.

Теорема 1. *Для того чтобы множество характеристических функций было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было равностепенно непрерывно в нуле.*

Доказательство основывается на следующей лемме:

* Характеристическими функциями называются функции вида

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x) \qquad (-\infty < t < \infty),$$

где $F(x)$ — неубывающая функция, причем $F(+\infty) - F(-\infty) = 1$.

Лемма 1. *Если $f(t)$—характеристическая функция, то для всех t и h выполняется неравенство*

$$|f(t+h)-f(t)| \leqslant \sqrt{2[1-\Re f(h)]}, \qquad (1)$$

где $\Re f(h)$ означает вещественную часть $f(h)$ *.

Доказательство леммы 1. Пользуясь неравенством Шварца, получаем:

$$|f(t+h)-f(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}(e^{ihx}-1)\, dF(x) \right| \leqslant \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ihx}-1|^2\, dF(x) \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} 2(1-\cos hx)\, dF(x) \right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2[1-\Re f(h)]}.$$

Доказательство теоремы 1. Из леммы 1 непосредственно следует, что множество характеристических функций, равностепенно непрерывное в нуле, равностепенно непрерывно на всей прямой. Так как оно, кроме того, равномерно ограничено **, то по теореме Arzelà из любой содержащейся в нем последовательности можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на каждом конечном интервале, что и доказывает достаточность условия теоремы. Что касается его необходимости, то если множество характеристических функций не равностепенно непрерывно в нуле, оно a fortiori не равностепенно непрерывное ни в каком интервале, содержащем нуль, и по той же теореме Arzelà из него можно выбрать последовательность, обладающую тем свойством, что никакая ее подпоследовательность не является равномерно сходящейся в таком интервале.

Последний результат можно еще уточнить:

Теорема 2. *Если последовательность характеристических функций $f_n(t)$ не является равностепенно непрерывной в нуле, то ни в каком интервале, содержащем нуль, она не может сходиться к функции, непрерывной в нуле.*

Доказательство основывается на следующей лемме:

Лемма 2. *Если $f(t)$—характеристическая функция, то для всех ξ и t выполняется неравенство*

$$\left| \frac{1}{2t} \int_{\xi-t}^{\xi+t} f(\tau)\, d\tau \right| \leqslant \sqrt{\frac{1+\Re f(t)}{2}} \;***. \qquad (2)$$

---

* Неравенство (1) было выведено для «спектральных функций», т. е. функций, представимых в виде

$$f(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} g(t+u)\, \bar{g}(u)\, du,$$

N. Wiener'ом [4]. По сообщению М. Г. Крейна аналогичное неравенство для положительно определенных $f(t)$ получил А. П. Артеменко.

Из неравенства (1), в частности, следует, что если $f(t)=1$ в некоторой точке $t=h$, то $f(t)$ является периодической функцией с периодом h.

** Характеристические функции по модулю не превосходят единицу.

*** Из неравенства (2), в частности, следует, что если $f(t)=-1$ в некоторой точке $t=h$, то $\int_{\xi-h}^{\xi+h} f(\tau)\, d\tau = 0$ для всех ξ, откуда вытекает, что $f(t)$ является периодической функцией с периодом h.

Доказательство леммы 2. Пользуясь неравенством Шварца и принимая во внимание неравенство $\frac{\sin^2 y}{y^2} \leqslant \frac{1+\cos y}{2}$ *, получаем:

$$\left|\frac{1}{2t}\int\limits_{\xi-t}^{\xi+t} f(\tau)\,d\tau\right| = \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t}\frac{\sin tx}{tx}\,dF(x)\right| \leqslant \left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 tx}{t^2x^2}\,dF(x)\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1+\cos tx}{2}\,dF(x)\right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1+\Re f(t)}{2}}.$$

Доказательство теоремы 2. Если последовательность $f_n(t)$ не равностепенно непрерывна в нуле, то существуют число $\theta < 1$ и последовательности $t_k \to 0$ и $n_k \to \infty$ такие, что $|f_{n_k}(t_k)| < \theta$ для всех k. Пусть, в противоречие с утверждением теоремы, $f_n(t)$ в некотором интервале $(-a, a)$ сходится к функции $f(t)$, непрерывной в нуле. Тогда для достаточно малых $h < a$ будем иметь

$$\left|\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} f(t)\,dt\right| > \sqrt{\frac{1+\theta}{2}} \tag{3}$$

$[f(0)=1$; $f(t)$ ограничена и измерима как предел равномерно ограниченной последовательности непрерывных функций]. Пусть l_k—последовательность целых чисел такая, что $l_k t_k \to h$. Имеем

$$\left|\frac{1}{2l_kt_k}\int\limits_{-l_kt_k}^{l_kt_k} f_{n_k}(\tau)\,d\tau\right| = \frac{1}{l_k}\left|\sum_{m=1}^{l_k}\frac{1}{2t_k}\int\limits_{(2m-l_k-2)\,t_k}^{(2m-l_k)\,t_k} f_{n_k}(\tau)\,d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{1+\Re f_{n_k}(t_k)}{2}} < \sqrt{\frac{1+\theta}{2}}. \tag{4}$$

Но левая часть неравенства (4) стремится к левой части неравенства (3), что и приводит к противоречию.

§ 2. Будем обозначать через $\mathfrak{P}_\omega$ $(0 < \omega \leqslant \infty)$ класс функций $f(t)$, определенных в открытом интервале $(-\omega, \omega)$ и удовлетворяющих следующим двум условиям:

1° $f(t)$ непрерывна в точке $t=0$;

2° $f(t)$ положительно определенная в $(-\omega, \omega)$: каковы бы ни были числа $t_1, \ldots, t_n$, $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n < \omega$, и комплексные числа $\xi_1, \ldots, \xi_n$ $(n=1, 2, \ldots)$, форма $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(t_j - t_k)\,\xi_j\bar{\xi}_k$ неотрицательна.

Теорема Крейна. *Для всякой функции $f(t) \in \mathfrak{P}_\omega$ $(\omega < \infty)$ существует хотя бы одна функция $\varphi(t) \in \mathfrak{P}_\infty$, совпадающая с $f(t)$ в интервале $(-\omega, \omega)$, так что $f(t)$ допускает по крайней мере одно представление*

$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x) \quad (-\omega < t < \omega), \tag{5}$$

---

* Доказательство: $y^2 = 4\left(\frac{y}{2}\right)^2 \geqslant 4\sin^2\frac{y}{2}$, откуда $\frac{\sin^2 y}{y^2} \leqslant \frac{\sin^2 2\frac{y}{2}}{4\sin^2\frac{y}{2}} = \cos^2\frac{y}{2} = \frac{1+\cos y}{2}$,

где $F(x)$—некоторая неубывающая функция с ограниченным изменением.

При доказательстве мы будем опираться на следующее предложение ([5]):

Лемма 3. *Положительно определенная последовательность $c_0, c_{\pm 1}, \ldots, c_{\pm(n-1)}$ * допускает представление*

$$c_k = \sum_{j=1}^{q} \rho_j e^{ik\xi_j} \quad [k=0, \pm 1, \ldots, \pm(n-1)],$$

где $\rho_j > 0$, $-\pi \leqslant \xi_j < \pi$, все ξ_j различны, $q \leqslant n-1$.

Доказательство теоремы. Без нарушения общности можем считать, что $f(0)=1$. Последовательность $f\left(\frac{k\omega}{n}\right)$, $-n+1 \leqslant k \leqslant n-1$, является положительно определенной и в силу леммы 3 может быть представлена в виде

$$f\left(\frac{k\omega}{n}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\, d\sigma_n(x), \tag{6}$$

где $\sigma_n(x)$—неубывающая функция с полным изменением $\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma_n(x) = 1$.

Положим

$$f_n(t) = \int_{-\frac{\pi n}{\omega}}^{\frac{\pi n}{\omega}} e^{itx}\, d\sigma_n\left(\frac{\omega x}{n}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF_n(x), \tag{7}$$

так что

$$f_n\left(\frac{k\omega}{n}\right) = f\left(\frac{k\omega}{n}\right) \text{ для } k=0, \pm 1, \ldots, \pm(n-1). \tag{8}$$

Прежде всего заметим, что при $0 \leqslant \theta < 1$ имеет место неравенство

$$1 - \Re f_n\left(\frac{\theta\omega}{n}\right) \leqslant 1 - \Re f\left(\frac{\omega}{n}\right). \tag{9}$$

Действительно, так как $\cos x \leqslant \cos\theta x$ при $-\pi \leqslant x < \pi$ и $0 \leqslant \theta < 1$, то, принимая во внимание (8), имеем:

$$1 - \Re f_n\left(\frac{\theta\omega}{n}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos\theta x)\, d\sigma_n(x) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos x)\, d\sigma_n(x) =$$
$$= 1 - \Re f_n\left(\frac{\omega}{n}\right) = 1 - \Re f\left(\frac{\omega}{n}\right).$$

Зафиксируем теперь h, $|h| < \omega$, и пусть $h = \frac{k+\theta}{n}\omega$, $0 \leqslant \theta < 1$ $\left(k \geqslant -n+1 \text{ при } n > \frac{1}{|h|}\right)$. Применяя последовательно (8), лемму 1 и (9), имеем:

---

* Положительно определенной называется (конечная или бесконечная) последовательность c_n, $n=0, \pm 1, \ldots$, обладающая тем свойством, что форма $\sum_j \sum_k c_{j-k} \xi_j \bar{\xi}_k$ неотрицательна при любом выборе комплексных чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots$

$$|1-f_n(h)|\leqslant\left|1-f_n\left(\frac{k\omega}{n}\right)\right|+\left|f_n\left(\frac{k\omega}{n}\right)-f_n(h)\right|\leqslant\left|1-f\left(\frac{k\omega}{n}\right)\right|+$$
$$+\sqrt{2\left[1-\Re f_n\left(\frac{\theta\omega}{n}\right)\right]}\leqslant\left|1-f\left(\frac{k\omega}{n}\right)\right|+\sqrt{2\left[1-\Re f\left(\frac{\omega}{n}\right)\right]}. \quad (10)$$

Так как $f(t)$ непрерывна в нуле, то правая часть неравенства (10) может быть сделана сколь угодно малой для всех достаточно малых h и достаточно больших n. Таким образом последовательность $f_n(t)$ равностепенно непрерывна в нуле и, значит, по теореме 1 компактна. Пусть $f_{n_m}(t)$—любая подпоследовательность последовательности $f_n(t)$, равномерно сходящаяся в каждом конечном интервале, и $\varphi(t)$—ее предел. $\varphi(t)$—характеристическая функция, т. е. допускает представление (5). С другой стороны, нетрудно видеть, что $\varphi(t)$ совпадает с $f(t)$ в интервале $(-\omega, \omega)$. Действительно, пусть $t\in(-\omega, \omega)$, $t=\frac{k_m+\theta_m}{n_m}$, $0\leqslant\theta_m<1$; такой же выкладкой, что и выше, получаем:

$$|f_{n_m}(t)-f(t)|\leqslant\left|f_{n_m}(t)-f_{n_m}\left(\frac{k_m\omega}{n_m}\right)\right|+\left|f_{n_m}\left(\frac{k_m\omega}{n_m}\right)-f(t)\right|\leqslant$$
$$\leqslant 2\sqrt{2\left[1-\Re f\left(\frac{\omega}{n_m}\right)\right]},$$

и, значит, в силу непрерывности $f(t)$ в нуле, $f_{n_m}(t)\to f(t)$ для всех $t\in(-\omega, \omega)$.

Тем самым теорема доказана. Таким же путем может быть доказана

Теорема Бохнера. *Всякая функция $f(t)$ класса $\mathfrak{P}_\infty$ может быть представлена в виде*

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\,dF(x),$$

где $F(x)$—неубывающая функция с ограниченным изменением.

При этом вместо леммы 3 можно воспользоваться следующим предложением ([6]):

Лемма 4 (теорема Herglotz'a). *Бесконечная положительно определенная последовательность c_n допускает представление*

$$c_n=\int_{-\pi}^{\pi}e^{inx}\,d\sigma(x) \quad (n=0, \pm1, \pm2, \ldots), \tag{11}$$

где $\sigma(x)$ — неубывающая функция с ограниченным изменением *.

* Приведем простое доказательство этой теоремы, найденное разновременно и независимо рядом математиков, но, кажется, нигде не опубликованное. В силу положительной определенности последовательности c_n имеем для всех N и x

$$P_N(x)=\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)c_n e^{-inx}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}c_{j-k}e^{-i(j-k)x}\geqslant 0.$$

Отсюда

$$\left(1-\frac{|n|}{N}\right)c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_N(x)\,e^{inx}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}e^{inx}\,d\sigma_N(x),$$

где $\sigma_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{x}P_N(y)\,dy$—неубывающая функция с полным изменением $\int_{-\pi}^{\pi}d\sigma_N(x)=c_0$.

Переходя к пределу по $N\to\infty$ и применяя теорему Хелли, мы и получим требуемое представление (11).

В заключение сделаем следующее замечание. Придавая в (6) показателю k все целые значения, мы получим бесконечную положительно определенную последовательность, являющуюся продолжением конечной последовательности $f\left(\frac{k\omega}{n}\right)$, $k=0, \pm 1, \ldots, \pm(n-1)$. С другой стороны, всякое бесконечное продолжение этой конечной последовательности в силу теоремы Herglotz'a допускает представление вида (6). Множество характеристических функций (7), соответствующих всем возможным бесконечным продолжениям последовательностей $f\left(\frac{k\omega}{n}\right)$, $k=0, \pm 1, \ldots, \pm(n-1)$, $n=1, 2, \ldots$, компактно; множество его предельных элементов (в смысле сходимости, равномерной на каждом конечном интервале) совпадает с множеством всех возможных продолжений функции $f(t)$, положительно определенных на всем интервале $(-\infty, \infty)$.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академия Наук СССР

Поступило
19 I 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Bochner, Vorlesungen über Fouriersche Integrale, 74—76 (1932). [2] М. Крейн, ДАН, XXV, № 8 (1939). [3] P. Lévy, Calcul des probabilités, 197—199, Paris (1925). [4] N. Wiener, The Fourier Integral and Certain of Its Applications, 154—156, Cambridge (1933). [5] Н. Ахиезер и М. Крейн, О некоторых вопросах теории моментов, 25, Харьков (1938). [6] G. Herglotz, Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. Leipz., math.-phys. Kl., 63 (1911).