Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 9

МАТЕМАТИКА

Б. З. ВУЛИХ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ В ЛИНЕЙНОМ ПОЛУУПОРЯДОЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 14 I 1940)

В настоящей и следующей (1) заметках устанавливается, что всякое линейное полуупорядоченное пространство Л. В. Канторовича (2), содержащее единицу в смысле H. Freudenthal'я (3), можно рассматривать как тело в некотором обобщенном смысле, именно в нем можно определить произведение двух элементов и обратный элемент, обладающие многими обычными свойствами, но эти понятия получают смысл не для всех элементов пространства. При этом операция умножения определяется так, что в различных конкретных пространствах, где имеется естественное понятие произведения, абстрактное произведение совпадает с ним*. Подробное изложение этой работы будет дано в другом месте.

§ 1. Пусть $X=\{x\}$—линейное полуупорядоченное пространство, удовлетворяющее аксиомам I—V**. Пусть в X имеется элемент $\mathbf{1}$ (единица пространства) такой, что для всякого $x>0$ $\inf(x, \mathbf{1})>0$. Очевидно, что если в X есть единица, то в нем имеется бесчисленное множество элементов, которые можно принять за единицу. Мы считаем в дальнейшем, что единица $\mathbf{1}$ выбрана и зафиксирована. Единичным элементом назовем всякий элемент $e\in X$, для которого $\inf(e, \mathbf{1}-e)=0$.

H. Freudenthal доказал (3), что в полуупорядоченном пространстве выполняется следующий закон дистрибутивности операций supremum'а и infimum'а:

$$\inf(\sup_{n=1}^{\infty} x_n, x)=\sup_{n=1}^{\infty}[\inf(x_n, x)].$$

Пользуясь методом трансфинитной индукции, можно доказать, что это равенство сохраняется и для любой трансфинитной последовательности x_ξ $(\xi<\alpha)$ (а следовательно, и для любого множества), т. е.

$$\inf(\sup_{\xi<\alpha} x_\xi, x)=\sup_{\xi<\alpha}[\inf(x_\xi, x)].$$

---

* Линейное полуупорядоченное кольцо, в котором для некоторых элементов определен обратный, изучал S. W. P. Steen(4). В его работе существенно, что произведение определено для любых двух элементов.

** Мы считаем известными основные понятия и обозначения статьи (2).

Аналогично

$$\sup(\inf_{\xi<\alpha} x_\xi,\ x) = \inf_{\xi<\alpha} [\sup(x_\xi,\ x)].$$

Теперь легко доказать, что sup и inf любого множества единичных элементов—тоже единичный элемент. Пусть, например, $e = \sup e_\xi$, где e_ξ—единичные элементы. Тогда имеем

$$\inf(e,\ \mathbf{1}-e) = \inf(\sup_\xi e_\xi,\ \mathbf{1}-\sup_\xi e_\xi) = \inf[\sup_\xi e_\xi,\ \inf_\xi(\mathbf{1}-e_\xi)] =$$
$$= \sup_\xi \{\inf[e_\xi,\ \inf_\xi(\mathbf{1}-e_\xi)]\} \leqslant \sup_\xi [\inf(e_\xi,\ \mathbf{1}-e_\xi)] = 0,$$

следовательно, e—единичный элемент. В частности, если e_1 и e_2—единичные элементы, то e_1+e_2 будет единичным элементом, если $\inf(e_1, e_2) = 0$. Если $e_1 \geqslant e_2$, то $e_1 - e_2$—единичный элемент.

Аналогично с помощью закона дистрибутивности легко проверить, что для каждого x существует наименьший единичный элемент e_x среди тех единичных элементов e, для которых $\inf(|x|,\ \mathbf{1}-e) = 0$. Назовем e_x *характеристическим элементом* x. Очевидно, что $e_x > 0$ для $x \neq 0$. Можно установить следующую формулу:

$$e_x = \lim[\inf(n|x|,\ \mathbf{1})] \qquad (n = 1, 2, \ldots \to \infty)^*. \tag{1}$$

Укажем еще следующие свойства характеристических элементов:

1° Если $x = \sup x_\xi$, где $x_\xi \geqslant 0$, то $e_x = \sup_\xi e_{x_\xi}$.

2° $e_{x+y} \leqslant \sup(e_x,\ e_y)$, причем, если $x, y \geqslant 0$, то имеет место знак равенства.

3° Если $x = \inf(y, z)$, где $y,\ z \geqslant 0$, то $e_x = \inf(e_y,\ e_z)$. В частности, $\inf(|y|,\ |z|) = 0$ эквивалентно $\inf(e_y,\ e_z) = 0$.

4° Если $x > 0$, то существуют число $\alpha > 0$ и единичный элемент $e > 0$ такие, что $\alpha e < x$ [3].

§ 2. Введем в рассмотрение трансфинитные ряды с положительными членами, составленные из элементов пространства X:

$$\sum_{\xi<\nu} x_\xi \qquad (x_\xi \geqslant 0),$$

где ν—произвольное трансфинитное число. Сумму такого ряда нужно понимать как определенную по индукции. Если уже определены суммы $\sum_{\xi<\mu} x_\xi$ для $\mu < \mu_0$, то полагаем:

при μ_0 I рода $\sum_{\xi<\mu_0} x_\xi = \sum_{\xi<\mu_0-1} x_\xi + x_{\mu_0-1}$;

при μ_0 II рода $\sum_{\xi<\mu_0} x_\xi = \sup_{\mu<\mu_0} \sum_{\xi<\mu} x_\xi$.

Как обычно, ряд назовем сходящимся, если сумма его конечна.

Заметим, что трансфинитные ряды с положительными членами обладают многими обычными свойствами положительных рядов. Так, сумма ряда не зависит от порядка его членов; при выбрасывании из сходящегося ряда некоторых его членов сумма данного ряда уменьшается на сумму ряда, состоящего из выброшенных членов; если

$$1 = \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_\eta < \ldots < \xi_\mu = \nu,$$

---

* Таким образом e_x совпадает с «характеристическим» элементом $e(x)$, введенным H. Freudenthal'ем [3].

причем для η II рода ξ_η—число, непосредственно следующее за предыдущими, то

$$\sum_{\xi<\nu} x_\xi = \sum_{\eta<\mu} \Big(\sum_{\xi_\eta \leqslant \xi < \xi_{\eta+1}} x_\xi \Big).$$

Кроме того очевидна формула

$$\sum_{\xi<\nu} (x_\xi + y_\xi) = \sum_{\xi<\nu} x_\xi + \sum_{\xi<\nu} y_\xi.$$

Пусть множество всех единичных элементов пространства X, бóльших нуля, вполне упорядочено по типу $\nu : e_\xi$, $\xi < \nu$. Из 4° сразу следует, что всякий $x \geqslant 0$ можно представить в виде суммы трансфинитного ряда

$$x = \sum_{\xi<\nu} \alpha_\xi e_\xi, \tag{2}$$

где $\alpha_\xi \geqslant 0$ *. Этот ряд можно построить, например, так: если α_ξ уже определены для $\xi < \mu$, то полагаем α_μ равным $\max \lambda$, для которых

$$\lambda e_\mu \leqslant x - \sum_{\xi<\mu} \alpha_\xi e_\xi.$$

α_1 берем равным $\max \lambda$, для которых $\lambda e_1 \leqslant x$. Очевидно, что представление каждого данного x в виде суммы ряда типа (2) можно осуществить бесчисленным множеством различных способов.

§ 3. Рассмотрим операцию проектирования, введенную H. Freudenthal'ем ([3]), именно, если e—единичный элемент, положим, для $x \geqslant 0$,

$$P_e(x) = \sup_n \inf (ne, x) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Для этой операции имеем $P_e[P_e(x)] = P_e(x)$.

Действительно,

$$P_e[P_e(x)] = \sup_n \inf [ne, \sup_k \inf (ke, x)] =$$
$$= \sup_n \sup_k \inf (ne, ke, x) = \sup_n \inf (ne, x) = P_e(x).$$

Для произвольного x полагаем

$$P_e(x) = P_e(x_+) - P_e(x_-).$$

Отметим некоторые свойства операции $P_e(x)$.

5° Если $x \leqslant y$, то $P_e(x) \leqslant P_e(y)$.

6° Для любого α $P_e(\alpha x) = \alpha \cdot P_e(x)$.

7° $P_e(x+y) = P_e(x) + P_e(y)$.

8° Если e'—единичный элемент, то $P_e(e') = \inf (e, e')$.

9° Если $e_x \leqslant e$, то $P_e(x) = x$. Если $\inf (e, e_x) = 0$, то $P_e(x) = 0$.

10° Если $\sup x_\xi = x$, то $P_e(x) = \sup P_e(x_\xi)$. Если $\inf x_\xi = y$, то $P_e(y) = \inf P_e(x_\xi)$.

11° Для каждого $x > 0$ и для каждого единичного элемента e^*, $0 < e^* \leqslant e_x$, существуют число $\beta > 0$ и единичный элемент $e \leqslant e^* (e > 0)$, для которых $P_e(x) < \beta e$.

---

* Если пространство X регулярно ([2]), то среди α_ξ может быть только исчислимое множество отличных от нуля.

Докажем 11°, ввиду того что оно представляет самостоятельный интерес. Очевидно, что невозможно выполнение неравенства $x \geqslant \beta e^*$ при любом β, так как иначе было бы $x = \infty$. Следовательно, при некотором β

$$\beta e^* - x = y = y_+ - y_-,$$

где $y_+ > 0$.

Пусть e—характеристический элемент y_+. Тогда

$$P_e(\beta e^*) - P_e(x) = y_+ > 0,$$

или $P_e(x) < \beta e$.

§ 4. Определим произведение двух элементов в пространстве X. Пусть x и y—любые положительные элементы, причем

$$x = \sum_{\xi < \nu} \alpha_\xi e_\xi, \qquad y = \sum_{\eta < \nu} \beta_\eta e_\eta. \tag{3}$$

Тогда полагаем

$$xy = \sum_{\xi, \eta < \nu} \alpha_\xi \beta_\eta \cdot \inf(e_\xi, e_\eta), \tag{4}$$

если сумма последнего ряда конечна. В противном случае считаем произведение xy не существующим. При этом заметим, что сумма ряда (4) не зависит от способа упорядочения пар индексов (ξ, η). Если же x и y—любые два элемента, полагаем

$$xy = x_+y_+ + x_-y_- - x_+y_- - x_-y_+, \tag{5}$$

при условии, что каждое из четырех произведений справа существует, а в противном случае говорим, что произведение xy не существует.

Формуле (4) можно придать другой вид. Именно, имеем

$$xy = \sum_{\xi < \nu} \alpha_\xi \sum_{\eta < \nu} \beta_\eta \inf(e_\xi, e_\eta).$$

Покажем, что сумма внутреннего ряда равна $P_{e_\xi}(y)$. Действительно, $P_e(\beta_1 e_1) = \beta_1 \cdot \inf(e, e_1)$. Пусть уже доказано, что для $\mu < \mu_0$ $(\mu_0 < \nu)$

$$P_e\Big(\sum_{\eta < \mu} \beta_\eta e_\eta\Big) = \sum_{\eta < \mu} \beta_\eta \cdot \inf(e, e_\eta).$$

Тогда та же формула сохраняется и с заменой μ на μ_0, что следует из 7°, если μ_0 I рода, и из 10°, если μ_0 II рода. Таким образом мы получаем для $x, y \geqslant 0$

$$xy = \sum_{\xi < \nu} \alpha_\xi \cdot P_{e_\xi}(y) = \sum_{\eta < \nu} \beta_\eta \cdot P_{e_\eta}(x) \tag{6}$$

(второе равенство устанавливается аналогично). Из (6) сразу следует, что величина xy (4) не зависит от выбора рядов (3).

Заметим, что в регулярном пространстве предыдущее определение произведения может быть упрощено.

Укажем некоторые простейшие свойства произведения.

12° Если xy существует, то существует $yx = xy$.

13° Если $x, y \geqslant 0$ и xy существует, то $xy \geqslant 0$.

14° Если xy и xz существуют, то существует $x(y+z) = xy + xz$.

15° Если xy существует, а $|x_1| \leqslant |x|$, $|y_1| \leqslant |y|$, то $x_1 y_1$ существует.

Доказательства 14° и 15° проводятся параллельно. Для неотрицательных элементов 14° следует из представления произведения по формуле (6) и 7°, а 15° следует из той же формулы (6) и 5°. 14° для произвольных элементов устанавливается с помощью формулы (5) и 15°, уже доказанного для положительных элементов. Из 14° следует, что если xy существует, то и $|x| \cdot |y|$ существует, а отсюда уже получается 15° в полном объеме.

16° Если xy существует, а α—вещественное число, то существует $(\alpha x) y = x(\alpha y) = \alpha (xy)$.

17° Для любого x существует $x \cdot \mathbf{1} = x$. Также $xe_x = x$.

18° $(xy)_+ = x_+ y_+ + x_- y_-$; $(xy)_- = x_+ y_- + x_- y_+$.

Для доказательства 18° прежде всего заметим, что характеристический элемент для $P_e(y)$ равен $\inf(e, e_y)$. Это следует из 1° и 3°. Применяя 1°, 2°, (6) и трансфинитную индукцию, получаем, что $e_{xy} \leqslant \inf(e_x, e_y)$ для x, $y \geqslant 0$ *. Отсюда уже легко получить, что

$$\inf(x_+ y_+ + x_- y_-,\ x_+ y_- + x_- y_+) = 0,$$

следовательно, 18° доказано.

Из 18° следует

19° $|xy| = |x| \cdot |y|$.

20° Если xy, $(xy)z$ и yz существуют, то существует $x(yz) = (xy)z$.

Наконец, с помощью 8° и 18° легко доказать

21° Для того чтобы произведение xy существовало и было равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы $\inf(|x|, |y|) = 0$.

22° $P_e(x) = xe$.

Для доказательства достаточно составить произведение xe $(e > 0)$ по формуле (6), причем для e взять разложение (3), в котором $\beta_\eta = 1$ для $e_\eta = e$ и $\beta_\eta = 0$ для прочих η. Для произвольного x нужно использовать 7° и 14°.

Прочие свойства произведения будут установлены в следующей заметке ([1]).

§ 5. В качестве примеров укажем на пространства L^p $(p \geqslant 1)$— функций, суммируемых с p-ой степенью, $\tilde{M}$—ограниченных почти везде измеримых функций, S—всех почти везде конечных измеримых функций. За единицу принимаем функцию $x(t) \equiv 1$. Тогда в этих пространствах определенное выше произведение оказывается обычным произведением двух функций. При этом в L^p произведение существует, если произведение соответствующих функций принадлежит L^p. Характеристическим элементом функции $x(t)$ во всех перечисленных пространствах является характеристическая функция того множества, где $x(t) \neq 0$.

Ленинградский государственный университет

Поступило
19 I 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. З. Вулих, ДАН, XXVI, № 9, стр. 852 (1940). [2] Л. В. Канторович, Матем. сб., 2(44), 121—168 (1937). [3] H. Freudenthal, Proc. Acad. Amsterdam, 39, 641—651 (1936). [4] S. W. P. Steen, Proc. London Math. Soc., (2), 41, 361—392 (1936).

* Можно показать, что на самом деле всегда имеет место знак равенства.