Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 9

МАТЕМАТИКА

Я. Л. ГЕРОНИМУС

ОБОБЩЕННЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ И ФОРМУЛА КРИСТОФФЕЛЯ-ДАРБУ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 13 I 1940)

Рассмотрим произвольную последовательность комплексных чисел $\{c_n\}_0^\infty$, обладающую свойством

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{-1} & c_0 & \cdots & c_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{-n+1} & c_{-n+2} & \cdots & c_0 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (n=1, 2, 3, \ldots); \quad c_{-k} = \bar{c}_k; \tag{1}$$

рассмотрим также полиномы $\{P_n(z)\}$, определяемые формулой

$$P_n(z) = \frac{1}{\Delta_n} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & \cdots & c_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{-n+1} & c_{-n+2} & \cdots & c_1 \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix} = z^n + \ldots, \quad (n=0, 1, 2, \ldots); \tag{2}$$

если ввести линейный функционал $\mathfrak{S}$

$$\mathfrak{S}\{z^k\} = c_k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{3}$$

то полиномы $\{P_n(z)\}$ ортогональны относительно последовательности $\{c_n\}_0^\infty$, т. е. ([1])

$$\mathfrak{S}\left\{P_n(z)\overline{P}_m\left(\frac{1}{z}\right)\right\} = \begin{cases} 0, & n \neq m; \\ h_n = \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} \neq 0, & n = m\,^*. \end{cases} \tag{4}$$

В частном случае, когда вместо условий (1) поставлены более ограничительные условия

$$\Delta_n > 0 \quad (n=1, 2, 3, \ldots), \tag{5}$$

* Через $\bar{\varphi}(z)$ обозначаем функцию $\varphi(z)$, у которой все коэффициенты заменены их сопряженными величинами.

т. е. если последовательность $\{c_n\}_0^\infty$ позитивна, то она, как известно, допускает представление

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\, d\sigma(\theta) \qquad (k=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots), \tag{6}$$

где $\sigma(\theta)$—неубывающая функция с бесчисленным множеством точек роста; в этом частном случае полиномы $\{P_n(z)\}$ ортогональны на окружности $|z|=1$ с неотрицательным весом $d\sigma(\theta)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_n(z)\,\overline{P_m(z)}\, d\sigma(\theta) = \begin{cases} 0, & n \neq m; \\ h_n > 0, & n = m. \end{cases} \quad z = e^{i\theta}, \tag{7}$$

Теорема I. *Ортогональные полиномы $\{P_n(z)\}$ связаны рекуррентным соотношением*

$$\left.\begin{aligned} &P_{n+1}(z) = zP_n(z) - \frac{\lambda_n}{h_n}P_n^*(z), \\ &P_n^*(z) = z^n\,\overline{P}_n\left(\frac{1}{z}\right), \qquad (n=0, \ 1, \ \ldots), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где

$$\lambda_n = \mathfrak{S}\{zP_n(z)\} = \frac{(-1)^n}{\Delta_n}\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+1} \\ c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{-n+1} & c_{-n+2} & \cdots & c_1 \end{vmatrix} \qquad (n=0, \ 1, \ \ldots). \tag{9}$$

Для доказательства запишем наш полином $P_n(z)$ в такой форме:

$$\frac{P_n(z) - z^n}{z^{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k^{(n)}\,\overline{P}_k\left(\frac{1}{z}\right), \quad (n=1, \ 2, \ 3, \ \ldots); \tag{10}$$

отсюда при $k=0, 1, \ldots, n-1$ получим

$$\mathfrak{S}\left\{P_n(z)\frac{P_k(z)}{z^n}\right\} - \mathfrak{S}\{zP_k(z)\} = -\lambda_k = \mu_k^{(n)} h_k; \tag{11}$$

таким образом имеем

$$P_n(z) = z^n - z^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda_k}{h_k}\overline{P}_k\left(\frac{1}{z}\right) \qquad (n=1, \ 2, \ \ldots), \tag{12}$$

откуда вытекает (8).

Теорема II. *Если дана произвольная последовательность комплексных чисел $\{a_n\}_0^\infty$ и построена система полиномов $\{P_n(z)\}$ по формуле*

$$P_{n+1}(z) = zP_n(z) - a_nP_n^*(z) \qquad (n=0, \ 1, \ 2, \ \ldots), \quad P_0 = 1, \tag{13}$$

то эти полиномы ортогональны относительно последовательности $\{c_n\}_0^\infty$, которая определяется (вплоть до множителя) из соотношения *

* c_0 остается произвольным.

$$(-1)^n \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+1} \\ c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{-n+1} & c_{-n+2} & \cdots & c_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & \cdots & c_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{-n} & c_{-n+1} & \cdots & c_0 \end{vmatrix} = a_n \qquad (14)$$

$$(n=0,\ 1,\ \ldots).$$

Действительно, мы имеем из (13) при $m=0,\ 1,\ \ldots,\ n$

$$\mathfrak{S}\left\{P_m(z)\,\overline{P}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right)\right\} = \mathfrak{S}\left\{\overline{P}_n\left(\frac{1}{z}\right)\frac{P_m(z)}{z}\right\} - \overline{a}_n\mathfrak{S}\left\{P_n(z)\frac{P_m(z)}{z^n}\right\}; \qquad (15)$$

если положить $\frac{c_1}{c_0}=a_0$, то (4) выполняется при $m,\ n\leqslant 1$; если теперь положим

$$a_k = \frac{\lambda_k}{h_k} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \qquad (16)$$

и допустим, что (4) справедливо для $m,\ n\leqslant N$, то мы видим из (15), что оно справедливо и для $m,\ n\leqslant N+1$.

Примечание. Для того что последовательность $\{c_n\}_0^\infty$ была позитивной, необходимо и достаточно, чтобы заданная последовательность $\{a_n\}_0^\infty$ удовлетворяла условиям

$$|a_n|<1 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (17)$$

Действительно, при этих условиях все корни полиномов $\{P_n(z)\}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ по теореме J. Schur'а [2] будут лежать в области $|z|<1$; с другой стороны, имеем равенство [[1], стр. 18]

$$\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = (1-|\alpha|^2)\,\mathfrak{S}\left\{p(z)\,\overline{p}\left(\frac{1}{z}\right)\right\}, \quad P_n(z)=(z-\alpha)\,p(z); \qquad (18)$$

отсюда видно, что из позитивности последовательности $\{c_k\}_0^{n-1}$ вытекает позитивность последовательности $\{c_k\}_0^n$.

Теорема III. *Для ортогональных полиномов $\{P_n(z)\}$ имеет место формула Кристоффеля-Дарбу*

$$K_n(x,\ y) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\overline{P_k(x)}\,P_k(y)}{h_k} =$$

$$= \frac{\overline{P_n^*(x)}\,P_n^*(y) - \overline{x}y\,\overline{P_n(x)}\,P_n(y)}{h_n(1-\overline{x}y)} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (19)$$

Справедливость ее при $n=0$ очевидна; достаточно поэтому доказать справедливость соотношения

$$K_{n+1}(x,\ y) - K_n(x,\ y) = \frac{\overline{P_{n+1}(x)}\,P_{n+1}(y)}{h_{n+1}} = \frac{\overline{P_{n+1}^*(x)}\,P_{n+1}^*(y) - \overline{x}y\,\overline{P_{n+1}(x)}\,P_{n+1}(y)}{h_{n+1}(1-\overline{x}y)} -$$

$$- \frac{\overline{P_n^*(x)}\,P_n^*(y) - \overline{x}y\,\overline{P_n(x)}\,P_n(y)}{h_n(1-\overline{x}y)}, \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (20)$$

Это последнее соотношение легко проверить, пользуясь (13), а также равенством

$$h_n - \frac{|\lambda_n|^2}{h_n} = h_{n+1}, \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{21}$$

которое легко получим из соотношения

$$\mathfrak{S}\left\{\frac{P_n(z)}{z^n}\right\} = h_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\lambda_k|^2}{h_k} = h_n \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{22}$$

Институт математики и механики
при Харьковском государственном университете

Поступило
19 I 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Ахиезер и М. Крейн, О некоторых вопросах теории моментов, Харьков (1938). [2] J. Schur, Journ. für die reine und angewandte Mathematik, 147, 205—32 (1917).