Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 7

МАТЕМАТИКА

Б. ЛЕВИТАН

ОБОБЩЕНИЕ ОПЕРАЦИИ СДВИГА В СВЯЗИ С ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 8 I 1940)

1. Как известно, H. Weyl (1) обосновал теорию почти периодических функций, рассмотрев интегральное уравнение

$$\lambda\varphi(s)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(s-t)\varphi(t)\,dt,$$

где $f(t)$—почти периодическая функция в смысле H. Bohr'a.

В связи с этим естественно рассмотреть более общее интегральное уравнение

$$\lambda\varphi(s)=M_t\{K(s,t)\varphi(t)\},$$

где под $M_t\{\varphi(t)\}$ понимается предел в смысле S. Banach'a (2) выражения $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varphi(t)\,dt$ при $T\to\infty$, а $K(s,t)$ есть непрерывная, ограниченная для всех действительных значений s и t функция.

В настоящей работе рассматриваются те ядра $K(s,t)$, для которых оператор A, определяемый из соотношения

$$A\varphi=M_t\{K(s,t)\varphi(t)\},$$

вполне непрерывен. Имеет место теорема:

Теорема 1. *Если семейство функций $K(s,t)$ (t—параметр) компактно, в смысле равномерной сходимости на всей действительной оси, то оператор A вполне непрерывен.*

Предварительно устанавливается следующий критерий компактности на бесконечном интервале.

Для того чтобы семейство непрерывных функций $\{f(x)\}$, ограниченных в своей совокупности, было компактным на всей оси, необходимо и достаточно, чтобы каково бы ни было $\varepsilon>0$, существовало такое разбиение вещественной оси Z на конечное число множеств $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2,\ldots,\mathfrak{A}_n$, что для любой функции $f(x)$ семейства и для любых двух чисел x', x'', принадлежащих одному и тому же множеству $\mathfrak{A}_k$ ($k=1,2,\ldots,n$), имело место неравенство

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

В частном случае для функций почти периодических это условие было указано W. Maak'ом ([3]).

2. Для того чтобы теперь выделить почти периодические функции, связанные с этими общими интегральными уравнениями, мы, следуя J. Delsarte'у ([4], [5]), введем обобщение операции сдвига.

Определим вначале скалярное произведение для двух измеримых ограниченных функций $f(t)$ и $g(t)$. Положим

$$(f, g) = M\{f(t) \cdot \overline{g(t)}\},$$

где под $M\{\varphi(t)\}$ мы снова понимаем предел в смысле Banach'а выражения $\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\varphi(t)\,dt$ при $T \to \infty$. Таким образом совокупность рассматриваемых функций образует гильбертово пространство с определением нормы

$$\|f\| = \sqrt{M\{|f(t)|^2\}}.$$

Пусть теперь T^s, зависящее от параметра s, семейство ограниченных операторов, определенных на функциях действительного переменного $f(t)$. Таким образом каждой функции $f(t)$ ставится в соответствие функция от двух переменных

$$T_t^s f(t) = K(s, t).$$

Допустим, что для семейства операторов T^s выполняются следующие условия:

A. $T_t^0 = E$, $T_0^s = E$, где E—тождественное преобразование.

B. Ограниченность в совокупности семейства операторов T^s и семейства обратных операторов $(T^s)^{-1}$ в том смысле, что существует константа M, не зависящая от функции $f(t)$ и от значения параметра s, такая, что

$$|T_t^s f(t)| \leqslant M \sup|f(t)|, \quad |(T_t^s)^{-1} f(t)| \leqslant M \sup|f(t)|.$$

C. Линейность операторов T^s, т. е.

$$T_t^s\{af(t) + bg(t)\} = aT_t^s f(t) + bT_t^s g(t),$$

где a, b—комплексные числа, $f(t)$, $g(t)$—функции действительного переменного t.

D. $T_t^s f(t)$ — действительная функция, если $f(t)$ — действительная функция.

E. $T_s^r T_t^s f(t) = T_t^s T_t^r f(t)$ для любой функции $f(t)$.

Простейшим примером параметрического семейства операторов является семейство операторов сдвига

$$T_t^s f(t) = f(t+s).$$

Все указанные условия в этом случае непосредственно проверяются.

Определим семейство сопряженных операторов $\tilde{T}^s$ из соотношения

$$(T_t^s f(t) \cdot g(t)) = (f(t), \tilde{T}_t^s g(t)).$$

3. Определение. *Непрерывная функция $f(t)$ называется почти периодической по отношению к заданному семейству операторов, если семейства функций $\tilde{T}_t^s f(t)$ (t—параметр), $T_t^s f(t)$ (s — параметр) компактны в смысле равномерной сходимости на всей оси.*

Из почти периодичности следует ограниченность функции $f(t)$. Далее, имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Если $f(t)$—почти периодическая функция и если $|f(t)|>0$ по крайней мере в одной точке $t=t_0$, то $M\{|f(t)|^2\}>0$.*

Если теперь ядро $\tilde{T}_t^s f(t)$ нормально и функция $f(t)$ почти периодическая по отношению к данному семейству операторов T^s, то оператор A, определяемый из соотношения $A\varphi=M_t\{\tilde{T}_t^s f(t).\varphi(t)\}$, нормальный и вполне непрерывный. Следовательно, существует ряд собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ и собственных функций $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$, т. е.

$$\lambda_k \varphi_k(s)=M_t\{\tilde{T}_t^s f(t).\varphi(t)\} \quad (k=1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Причем в силу теоремы 2 равенства (1) следует понимать как равенства в точке.

Обозначим через $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots, \varphi_n(s)$ полную ортонормированную систему решений уравнения (1), принадлежащих данному собственному числу λ'. Рассмотрим уравнение

$$\lambda'\varphi(s)=M_t\{\tilde{T}_t^s f(t)\varphi(t)\}.$$

Применяя к обеим частям этого уравнения операцию T_s^r, получим в силу свойства E:

$$\lambda' T_s^r\varphi(s)=M_t\{f(t)\cdot T_s^r T_t^s\varphi(t)\}=$$
$$=M_t\{f(t)\cdot T_t^s T_t^r\varphi(t)\}=M_t\{\tilde{T}_t^s f(t)\cdot T_t^r\varphi(t)\}.$$

Таким образом $T_s^r\varphi(s)$ также является собственной функцией, принадлежащей тому же собственному числу λ'. Следовательно,

$$T_s^r\varphi_i(s)=\sum_{j=1}^{n} l_{ij}(r)\varphi_j(s). \tag{2}$$

Отсюда, в силу свойства E, легко получаем

$$T_s^r l_{ij}(s)=\sum_{k=1}^{n} l_{ik}(r)\, l_{kj}(s),$$

или, если через $E(s)$ обозначить матрицу $\{l_{ij}(s)\}$, то

$$T_s^r E(s)=E(r)E(s).$$

Полагая в соотношении (2) $s=0$, получим

$$\varphi(r)=\sum_{j=1}^{n} l_{ij}(r)\varphi_j(0).$$

4. В случае, если для всяких двух различных значений s и r операторы T^s перестановочны с операторами T^r и $\tilde{T}^r$, т. е. для произвольной функции $f(t)$ имеют место соотношения

$$T_t^s T_t^r f(t)=T_t^r T_t^s f(t), \qquad T_t^s \tilde{T}_t^r f(t)=\tilde{T}_t^r T_t^s f(t),$$

то, как нетрудно показать, матрицы $E(s)$ перестановочны с матрицами $E(r)$ и $\tilde{E}(r)=\{\bar{l}_{ji}(r)\}$. В частности, полагая $s=r$, получаем, что матрицы $E(s)$ нормальны.

Следовательно, в силу известной теоремы([1]), существует такая постоянная унитарная матрица U, что

$$U^{-1}E(s)U=\{l_i(s)\},$$

где $\{l_i(s)\}$—диагональная матрица. Функции $l_i(t)$ удовлетворяют, очевидно, соотношению

$$T_t^s l_i(t)=l_i(s)\, l_i(t).$$

Эти функции мы будем называть собственными функциями операторов T^s. Обозначим через $\{l(t)\}$ совокупность всех ограниченных собственных функций операторов T^s. Из условия B следует

$$|T_t^s l(t)| = |l(s)\, l(t)| \leqslant M \sup |l(t)|.$$

Отсюда $|l(s)| \leqslant M$, т. е. функции $l(s)$ ограничены в совокупности. Функции совокупности $\{l(t)\}$ взаимно ортогональны.

Каждой ограниченной, измеримой в каждом конечном интервале функции $f(t)$ можно отнести ряд

$$f(t) \sim \sum_n \frac{A_n}{\alpha_n} l_n(t),$$

$$A_n = \frac{1}{\alpha_n} M\{f(t)\overline{l_n(t)}\}, \qquad \alpha_n = \sqrt{M\{|l_n(t)|^2\}}.$$

Для почти периодической функции $f(t)$ имеет место уравнение Parseval'я

$$M\{|f(t)|^2\} = \sum_n |A_n|^2$$

и теорема о равномерной аппроксимации функции $f(t)$ конечными суммами, образованными из ряда Fourier функции $f(t)$.

5. В качестве примера семейства перестановочных операторов приведем семейство операторов, связанных с самосопряженными дифференциальными уравнениями второго порядка

$$Lu = u'' - \rho(x)\, u,$$

где $\rho(x)$—четная, целая аналитическая функция, действительная в интервале $(-\infty, \infty)$.

Определим семейство операторов T^s, связанных с дифференциальным оператором L.

Для функций с непрерывной второй производной это семейство определяется как решение уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \rho(r)\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} - \rho(s)\,\Phi,$$

при начальных условиях

$$\Phi(r, 0) = f(r), \quad \left.\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right|_{s=0} = 0.$$

Можно показать, что функция $T_s^r f(r)$ симметрическая, т. е.

$$T_s^r f(s) = T_r^s f(r).$$

Далее, операторы T^s самосопряженны, т. е. для любых функций $f(r)$ и $g(r)$ имеет место соотношение

$$M_r\{T_r^s f(r)\, g(r)\} = M_r\{f(r)\, T_r^s g(r)\}.$$

Имеют также место свойства A, C, D и E.

Институт математики и механики
при Харьковском государственном университете

Поступило
9 I 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Weyl, Integralgleichungen und fastperiodische Funktionen, Math. Ann., Bd. 97, S. 338—356 (1927). [2] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, p. 33. [3] W. Maak, Über den Begriff der fastperiodischen Funktion, Math. Tidsskrift, B, S. 7 (1938). [4] J. Delsarte, Sur une extension de la formule de Taylor, Journ. de Math. pures et appliquées, XVII, p. 213—231 (1938). [5] J. Delsarte, Une extension nouvelle de la fonction presque-périodique de Bohr, Acta Math., t. 69, p. 259—317 (1938).