Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 7

МАТЕМАТИКА

Д. И. ШЕРМАН

УПРУГАЯ ПЛОСКОСТЬ С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 13 I 1940)

Пусть упругая плоскость имеет разрезы γ_{2k-1}, состоящие из проходимых в противоположных направлениях отрезков $a_{2k-1}a_{2k}$ $(k=1, \ldots, n)$, расположенных вдоль действительной оси плоскости $z=x+iy$. Верхний и нижний берега разрезов обозначим соответственно через $\gamma_{2k-1}^{(1)}$ и $\gamma_{2k-1}^{(2)}$. Сумму отрезков $\gamma_{2k-1}^{(1)}$ обозначим через L_1 и условимся считать обход L_1 совпадающим с положительным относительно верхней полуплоскости обходом действительной оси. Обход же разрезов будем считать происходящим по часовой стрелке.

Определение напряжений по заданным внешним силам в такой области сводится [1], как известно, к отысканию двух аналитических вне разрезов функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из условий:

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f(t) \text{ на } \gamma_{2k-1} \quad (k=1, \ldots, n); \tag{1}$$

здесь $t=x$ — аффикс точки границы,

$$f=\begin{cases} f_1=f_1^{(0)}+C_{2k-1} \text{ на } \gamma_{2k-1}^{(1)}, \\ f_2=f_2^{(0)}+C_{2k-1} \text{ на } \gamma_{2k-1}^{(2)}; \end{cases}$$

$$f_1^{(0)}=\int\limits_{a_{2k-1}}^{t}(X_n+iY_n)\,dx, \quad f_2^{(0)}=i\int\limits_{a_{2k-1}}^{a_{2k}}(X_n+iY_n)\,dx+$$
$$+i\int\limits_{a_{2k}}^{t}(X_n+iY_n)\,dx, \tag{2}$$

где X_n+iY_n — векторы действующих на берега внешних сил, C_{2k-1} — некоторые постоянные. Относительно функций $f_1^{(0)}$ и $f_2^{(0)}$ сделаем предположение, что они удовлетворяют условию Гельдера.

Главный вектор внешних сил, действующих на каждый из разрезов, будем считать равным нулю *. При этом функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ будут регулярными в области; на бесконечности их можно считать равными нулю.

Положим
$$\delta(z)=z\varphi'(z)+\psi(z),$$

* Как известно, задача всегда может быть приведена к этому случаю.

где регулярная вне разрезов функция $\delta(z)$ также равна нулю на бесконечности, и условимся, кроме того, через $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и $\delta_1(t)$, $\delta_2(t)$ обозначать предельные значения $\varphi(z)$ и $\delta(z)$ соответственно на верхнем и нижнем берегах разрезов. Тогда (1) запишется в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(t)+\overline{\delta_1(t)}=f_1(t) \text{ на } \gamma_{2k-1}^{(1)}, \\ &\varphi_2(t)+\overline{\delta_2(t)}=f_2(t) \text{ на } \gamma_{2k-1}^{(2)}. \\ &\qquad (k=1, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Положим, далее, на действительной оси:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1(t)&=\frac{\varphi_1(t)+\overline{\varphi_2(t)}}{2}, \quad \omega_2(t)=\frac{\varphi_1(t)-\overline{\varphi_2(t)}}{2}, \\ \chi_1(t)&=\frac{\delta_1(t)+\overline{\delta_2(t)}}{2}, \quad \chi_2(t)=\frac{\delta_1(t)-\overline{\delta_2(t)}}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Очевидно, $\omega_1(t), \ldots, \chi_2(t)$ будут предельными значениями некоторых функций $\omega_1(z), \ldots, \chi_2(z)$, регулярных в верхней полуплоскости.

С помощью последних формул будем иметь на $\gamma_{2k-1}^{(1)}$ $(k=1, \ldots, n)$:

$$\omega_1(t)+\overline{\chi_1(t)}=g_1, \quad \omega_2(t)+\overline{\chi_2(t)}=g_2, \tag{5}$$

где

$$g_1=\frac{f_1+\overline{f_2}}{2}, \quad g_2=\frac{f_1-\overline{f_2}}{2}. \tag{6}$$

Так как на остальных отрезках $a_{2k}a_{2k+1}$ $(k=1, \ldots, n;\ a_{2n+1}=a_1)$ действительной оси функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют одинаковые предельные значения сверху и снизу, то на них имеем:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1(t)-\overline{\omega_1(t)}&=0, \\ \chi_1(t)-\overline{\chi_1(t)}&=0; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_2(t)+\overline{\omega_2(t)}&=0, \\ \chi_2(t)+\overline{\chi_2(t)}&=0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Умножим первое из равенств (5) на $\frac{1}{2\pi i}\frac{dt}{t-z}$, где z—произвольная точка верхней полуплоскости, и проинтегрируем по сумме отрезков L_1. Получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\omega_1(t)}{t-z}dt+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\overline{\chi_1(t)}}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{g_1}{t-z}dt. \tag{9}$$

Но по теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\overline{\chi_1(t)}}{t-z}dt=-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{\overline{\chi_1(t)}}{t-z}dt,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\omega_1(t)}{t-z}dt=\omega_1(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{\omega_1(t)}{t-z}dt,$$

где L_2—сумма отрезков $a_{2k}a_{2k+1}$ $(k=1, \ldots, n)$. Поэтому, в силу второго из равенств (7), можно переписать (9) в виде

$$\omega_1(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{\omega_1(t)}{t-z}dt-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{\chi_1(t)}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{g_1}{t-z}dt. \tag{10}$$

Умножим теперь равенство, сопряженное с первым из равенств (5), на $\frac{1}{2\pi i}\frac{dt}{t-z}$ и проинтегрируем опять по L_1. Аналогичным образом найдем:

$$\chi_1(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{\chi_1(t)}{t-z}\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{\omega_1(t)}{t-z}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\overline{g_1}}{t-z}\,dt. \tag{11}$$

Вычитая последнее равенство из (10), будем иметь:

$$\omega_1(z)-\chi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{g_1-\overline{g_1}}{t-z}\,dt. \tag{12}$$

Перейдем в этом равенстве к пределу, устремляя z к точке t_0 границы L_1, и сложим его почленно с равенством, сопряженным с первыми из (5). Тогда получим: на L_1

$$\omega_1(t_0)+\overline{\omega_1(t_0)}=\overline{g_1}+\lim_{z\to t_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{g_1-\overline{g_1}}{t-z}\,dt. \tag{13}$$

Поступая таким же образом со вторым из равенств (5), найдем после всех аналогичных указанным преобразований:

$$\overline{\omega_2(t_0)}-\omega_2(t_0)=\overline{g_2}-\lim_{z\to t_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{g_2+\overline{g_2}}{t-z}\,dt \tag{14}$$

на L_1.

Формулы (7), (8), (13) и (14) определяют на отрезках L_2 и L_1 действительной оси (соответственно) мнимую и вещественную части функции $\omega_1(z)$ и (соответственно) вещественную и мнимую части функции $\omega_2(z)$.

Определение функций $\omega_1(z)$ и $\omega_2(z)$ свелось, таким образом, к частному случаю задачи Гильберта и не представляет никаких затруднений. Полное и наиболее удобное решение этой задачи дано в совместной работе М. Келдыш и Л. Седова [2]. Используя результаты названных авторов, после некоторых вычислений и преобразований найдем*:

$$\omega_1(z)=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{g_1-\overline{g_1}}{t-z}\,dt+$$
$$+\frac{1}{4\pi i}\prod_1^n\left(\frac{a_{2k}-z}{a_{2k-1}-z}\right)^{\frac{1}{2}}\int\limits_{L_1}\prod_1^n\left(\frac{a_{2k-1}-t}{a_{2k}-t}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{g_1+\overline{g_1}}{t-z}\,dt,$$

$$\omega_2(z)=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{g_2+\overline{g_2}}{t-z}\,dt+$$
$$+\frac{1}{4\pi i}\prod_1^n\left(\frac{a_{2k}-z}{a_{2k-1}-z}\right)^{\frac{1}{2}}\int\limits_{L_1}\prod_1^n\left(\frac{a_{2k-1}-t}{a_{2k}-t}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{g_2-\overline{g_2}}{t-z}\,dt.$$

---

* Мы оставляем без внимания решения соответствующих однородных задач, разрывные одновременно в точках a_{2k-1} и a_{2k} ($k=1,\ldots,n$). Преобразования, аналогичные проделанным при выводе формул для $\omega_1(z)$ и $\omega_2(z)$, применялись нами в статье [3].

Отсюда, обращаясь к равенствам (4), получим для искомой функции $\varphi(z)$ следующее выражение:

$$\varphi(z)=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{f_1-f_2}{t-z}\,dt+$$

$$+\frac{1}{4\pi i}\prod_1^n\left(\frac{a_{2k}-z}{a_{2k-1}-z}\right)^{\frac{1}{2}}\int\limits_{L_1}\prod_1^n\left(\frac{a_{2k-1}-t}{a_{2k}-t}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{f_1+f_2}{t-z}\,dt. \qquad (15)$$

Под содержащимся под знаком интеграла произведением $\prod\limits_1^n\left(\frac{a_{2k-1}-t}{a_{2k}-t}\right)^{\frac{1}{2}}$ здесь понимается предельное значение функции $\prod\limits_1^n\left(\frac{a_{2k-1}-z}{a_{2k}-z}\right)^{\frac{1}{2}}$ на верхнем берегу разреза.

Значение функции $\psi(z)$ может быть теперь легко выписано. Так как, по условию, главный вектор сил, действующих на каждом разрезе, равен нулю, то разность f_1-f_2 равна нулю на концах отрезков $\gamma_{2k-1}^{(1)}$ и, следовательно, первый член формулы (15) будет непрерывным всюду вплоть до контура. Для того чтобы функция $\varphi(z)$ также была непрерывной всюду, определим содержащиеся в формуле (15) постоянные C_{2k-1} ($k=1, \dots, n$) из следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_1^n C_{2k-1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{2k-1}^{(1)}}\prod_1^n\left(\frac{a_{2k-1}-t}{a_{2k}-t}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{t-a_{2e-1}}+$$

$$+\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L_1}\prod_1^n\left(\frac{a_{2k-1}-t}{a_{2k}-t}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{f_1^{(0)}+f_2^{(0)}}{t-a_{2e-1}}\,dt=0.$$

$$(e=1, \dots, n).$$

Полученная система разрешима, так как, предполагая противное и рассматривая однородную систему (при $f_1^{(0)}=f_2^{(0)}=0$), мы после изучения свойств соответствующих этому случаю функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ придем в противоречие с теоремой единственности*.

Приведенное решение ввиду своей простоты может быть использовано в некоторых прикладных задачах, например при расчете напряжений в междукамерных целиках шахтных выработок.

Здесь мы рассмотрели случай изотропной упругой среды. Очевидно, та же задача может быть решена аналогичным образом и в случае анизотропной среды. Наконец, обе эти задачи также могут быть решены и при заданных на разрезах смещениях.

Сейсмологический институт
Академия Наук СССР
Москва

Поступило
14 I 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Мусхелишвили, Некоторые задачи теории упругости, Изд. АН СССР (1935). [2] М. В. Келдыш и Л. И. Седов, ДАН, XVI, № 1 (1937). [3] Д. И. Шерман, Плоская задача теории упругости со смешанными предельными условиями, Труды Сейсмологического института, № 88.

* См., например, работу ([3]).