Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 2

МАТЕМАТИКА

В. Я. АРСЕНИН

О ПРОЕКТИРОВАНИИ НЕКОТОРЫХ B-МНОЖЕСТВ

(*Представлено академиком С. Л. Соболевым 25 I 1940*)

Целью настоящего сообщения является установление некоторых новых случаев, когда проекция на ось OX плоских B-множеств есть B-множество.

Недавно Kunugui установил, что проекция на ось OX плоского множества типа $G\delta$, пересекающегося с прямыми $x=x_0$ по множествам типа $F\sigma$, есть всегда B-множество (1). П. С. Новиков доказал более общую теорему: *проекция на ось OX произвольного плоского B-множества, пересекающегося с прямыми $x=x_0$ по замкнутым множествам, есть B-множество.*

В связи с этим возникает вопрос о проекциях на ось OX таких плоских B-множеств, которые с прямыми $x=x_0$ пересекаются по множествам типа $F\sigma$. Мы докажем более общее предложение [вполне аналогичное соответствующим предложениям, доказанным Kunugui (1) и П. С. Новиковым (2)], из которого следует, что проекция указанного B-множества является B-множеством.

Настоящая работа выполнена под руководством П. С. Новикова, которому выражаю свою глубокую благодарность, и дает ответ на вопрос, поставленный Kunugui (1).

Пусть E есть B-множество, расположенное в плоскости XOY. Пусть, далее, P есть совокупность точек множества E, лежащих на прямых $x=x_0$, пересекающих множество E по множествам типа $F\sigma$. Множество P есть CA-множество (1). Тогда имеем:

Теорема. *Проекция на ось OX множества P есть CA-множество.*

Пусть M есть множество типа $F\sigma$, расположенное на оси OX. Пусть, далее, N есть плоское множество типа $G\delta$, проекция которого на ось OX совпадает с множеством M, $N=s_1\cdot s_2 \dots s_n \dots$, такое, что s_n есть сумма прямоугольников (исключая их границы) n-го ранга, попарно не имеющих общих точек; стороны прямоугольников параллельны осям координат; $s_n \subset s_{n-1}$. Мы доказываем лемму.

Лемма. *Среди прямоугольников, определяющих множество N, найдется такой прямоугольник, что замыкание проекции на ось OX части множества N, содержащейся в этом прямоугольнике, принадлежит множеству M.*

Доказательство теоремы. Известно, что плоское B-множество E есть проекция на плоскость XOY униформного относительно этой плоскости пространственного множества T типа $G\delta$, представляющего собой пересечение вложенных друг в друга счетных систем параллелепипедов с гранями, параллельными координатным плоскостям, причем параллелепипеды одного и того же ранга попарно не имеют общих точек [3].

Занумеруем в каком-нибудь порядке все параллелепипеды, определяющие множество T. Обозначим через E_n проекцию на плоскость XOY части множества T, заключенной в параллелепипеде номера n. Тогда множество E представится в виде суммы

$$E=\sum_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Обозначим через $E_n^{(y)}$ множество, получающееся из множества E_n путем замыкания его в направлении оси OY. $E_n^{(y)}$ есть A-множество [2]. Дальше доказательство проходит совершенно аналогично доказательству П. С. Новикова [4]. Будем считать, что множество E расположено в единичном квадрате.

Пусть I_{ki}—замкнутая полоса единичного квадрата

$$\frac{i-1}{k} \leqslant y \leqslant \frac{i}{k}.$$

Пусть $Q_{ki}^{(n)}$ есть проекция множества $E_n^{(y)} \cdot I_{ki}$ на прямую $y=\frac{i-1}{k}$, а $\mathscr{E}_{ki}^{(n)}$—гребенка, образованная всеми точками полосы I_{ki}, проектирующимися в точки множества $Q_{ki}^{(n)}$.

Пусть

$$\mathscr{E}_k^{(n)}=\sum_{i=1}^{k} \mathscr{E}_{ki}^{(n)}.$$

$\mathscr{E}_{ki}^{(n)}$ и $\mathscr{E}_k^{(n)}$ суть A-множества. Обозначим через $\mathscr{E}^{(n)}$ множество $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \mathscr{E}_k^{(n)}$.

Рассмотрим множества $\mathscr{E}_k^{(n)}-\mathscr{E}^{(n)}$. Согласно теореме отделимости, доказанной П. С. Новиковым [5], существует счетная система CA-множеств $R_1^{(n)}, R_2^{(n)}, \ldots, R_k^{(n)}, \ldots$ таких, что $R_k^{(n)} \supset \mathscr{E}_k^{(n)}-\mathscr{E}^{(n)}$ и $\prod\limits_{k=1}^{\infty} R_k^{(n)}=0$.

Обозначим через $U_{ki}^{(n)}$ множество точек прямых полосы I_{ki}, параллельных оси OY, целиком принадлежащих множеству $R_k^{(n)}+P$. Очевидно, что все $U_{ki}^{(n)}$ суть CA-множества, следовательно, и

$$U_k^{(n)}=\sum_{i=1}^{k} U_{ki}^{(n)}$$

суть CA-множества. Поскольку $R_k^{(n)}+P \supset U_k^{(n)}$, то

$$U^{(n)}=\prod_{k=1}^{\infty} U_k^{(n)} \subset \prod_{k=1}^{\infty}\left(R_k^{(n)}+P\right)=P.$$

$U^{(n)}$ есть CA-множество.

Обозначим через P_n совокупность точек множества $E_n^{(y)}$, лежащих на прямых $x=x_0$, пересекающих это множество по замкнутым множествам, принадлежащим множеству P. $P_n \subset U_k^{(n)}$, следовательно, $P_n \subset U^{(n)}$. Согласно указанной выше лемме для всякой прямой $x=x_0$, пересекающей множество P, найдется такое множество $E_n^{(y)}$, пересечение которого с этой прямой принадлежит множеству P. Поэтому

$$\text{пр}_{OX} P = \sum_{n=1}^{\infty} \text{пр}_{OX} P_n.$$

Но так как имеем $P_n \subset U^{(n)} \subset P$, то

$$\text{пр}_{OX} P = \sum_{n=1}^{\infty} \text{пр}_{OX} U^{(n)};$$

проекция же на ось OX множества $U^{(n)}$ есть CA-множество ([4]), следовательно, $\text{пр}_{OX} P$ есть CA-множество. Теорема доказана.

Следствие. Проекция на ось OX плоского B-множества E, такого, что прямые $x=x_0$ пересекают E по множествам типа $F\sigma$, есть B-множество.

Педагогический институт
им. К. Либкнехта
Москва

Поступило
25 II 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Kunugui, Journ. of the Faculty of Science. Hokaido Imperial University, vol. VII, № 3—4, 187—189. [2] П. С. Новиков, ДАН, III (1934). [3] N. Lusin, Leçons sur les ensembles..., Paris (1930). [4] П. С. Новиков, ДАН, XX (1939). [5] П. С. Новиков, ДАН, IV (1934).