Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 7

МАТЕМАТИКА

П. АЛЕКСАНДРОВ, член-корреспондент Академии Наук СССР

ГРУППЫ БЕТТИ И КОЛЬЦО ГОМОЛОГИЙ ЛОКАЛЬНО-БИКОМПАКТНОГО ПРОСТРАНСТВА

1. В последние годы предложено несколько определений групп Бетти, в основном для бикомпактных и локально-бикомпактных пространств: определение Колмогорова ([1]), два определения Александера ([2,3]), определение Стинрода ([4]). Предлагаемое в настоящей заметке определение осуществляется, как и определение Стинрода, в пределах моих методов приближения топологических пространств комплексами ([5]). Этими же методами доказывается мною и центральный факт теории — закон двойственности Колмогорова ([1]), т. е. *изоморфизм групп* $\nabla^r(A, X)$ и $\nabla^{r+1}(R-A, X)$ (см. ниже) *для любого замкнутого множества A в локально-бикомпактном R, с нулевыми группами* $\nabla^r(R, X)$ и $\nabla^{r+1}(R, X)$. За этим доказательством отсылаю читателя к моим более подробным публикациям ([6]), посвященным этому предмету. Изоморфизм групп Колмогорова с группами Александера ([2]) доказал Morris Kline ([7]). Изоморфизм моих групп с группами Колмогорова только что доказал в еще неопубликованной работе Г. Чогошвили. Наконец, изоморфизм моих групп с группами Стинрода (имеющий место лишь в случае бикомпактного R) доказан у меня ([6]). Эквивалентность различных определений групп Бетти интересна как геометрический факт и тем более важна, что в различных вопросах удобно пользоваться то одним, то другим определением.

2. Покрытия. Пусть R — нормальное локально-бикомпактное пространство. Конечную систему открытых множеств $\mathfrak{s}^\alpha = \{e_1^\alpha, \ldots, e_{s_\alpha}^\alpha\}$, сумма которых совпадает с R, называем покрытием пространства R, если пересечение любых двух множеств из $\mathfrak{s}^\alpha$ либо пусто либо принадлежит $\mathfrak{s}^\alpha$. Если каждый элемент покрытия $\mathfrak{s}^\beta$ содержится хотя бы в одном элементе покрытия $\mathfrak{s}^\alpha$, то покрытие $\mathfrak{s}^\beta$ называется вписанным в покрытие $\mathfrak{s}^\alpha$. Каковы бы ни были покрытия $\mathfrak{s}^\alpha$, $\mathfrak{s}^\beta$, существует покрытие $\mathfrak{s}^\gamma$, вписанное и в $\mathfrak{s}^\alpha$ и в $\mathfrak{s}^\beta$.

3. Функции f_α^r на покрытии $\mathfrak{s}^\alpha$. Пусть X—произвольная абелева группа. Для каждого покрытия $\mathfrak{s}^\alpha$ рассматриваются функции $f_\alpha^r = f_\alpha^r(e_{i_0}^\alpha, \ldots, e_{i_r}^\alpha)$ от $r+1$ аргументов $e_i^\alpha \in \mathfrak{s}^\alpha$, со значениями, принадлежащими к X, удовлетворяющие следующим условиям:

1° Функция f_α^r определена для таких $e_{i_0}^\alpha, \ldots, e_{i_r}^\alpha$, для которых $e_{i_0}^\alpha \supseteq \ldots \supseteq e_{i_r}^\alpha$, причем в случае совпадения $e_{i_k}^\alpha = e_{i_{k+1}}^\alpha$ хотя бы для одного k имеем $f_\alpha^r(e_{i_0}^\alpha, \ldots, e_{i_r}^\alpha) = 0$.

2° Значение функции $f_\alpha^r(e_{i_0}^\alpha, \ldots, e_{i_r}^\alpha)$ равно нулю, если $\overline{e_{i_r}^\alpha}$ не бикомпактно.

Функции f_α^r образуют относительно сложения группу, которую обозначаем через L_α^r.

4. Граничный оператор ∇ ставит в соответствие каждой функции f_α^r определенную функцию $\nabla f_\alpha^r = f_\alpha^{r+1}$, именно

$$f_\alpha^{r+1}(e_{i_0}^\alpha, \ldots, e_{i_{r+1}}^\alpha) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant r+1} (-1)^k f_\alpha^r (e_{i_0}^\alpha, \ldots, e_{i_{k-1}}^\alpha, e_{i_{k+1}}^\alpha, \ldots, e_{i_{r+1}}^\alpha).$$

Функция f_α^r называется r-мерным ∇-циклом покрытия ε^α, если $\nabla f_\alpha^r = 0$. Функция f_α^r называется гомологичной нулю на ε^α, если существует функция f_α^{r-1}, удовлетворяющая условию $\nabla f_\alpha^{r-1} = f_\alpha^r$. Так как $\nabla\nabla f_\alpha^r = 0$, то всякая функция, гомологичная нулю, есть цикл. Таким образом в группе L_α^r содержится подгруппа Z_α^r всех r-мерных ∇-циклов, а в Z_α^r содержится подгруппа H_α^r циклов, гомологичных нулю.

5. Отображение S_α^β и оператор σ_β^α. Пусть покрытие ε^β вписано в покрытие ε^α и пусть $e_j^\beta \in \varepsilon^\beta$. Обозначаем через $S_\alpha^\beta e_j^\beta$ пересечение всех элементов $e_i^\alpha \in \varepsilon^\alpha$, содержащих e_j^β. Таким образом установлено отображение S_α^β множества ε^β в множество ε^α. Каждой функции f_α^r ставим в соответствие определенную функцию $\sigma_\beta^\alpha f_\alpha^r = f_\beta^r$, а именно функцию $f_\beta^r(e_{j_0}^\beta, \ldots, e_{j_r}^\beta) = f_\alpha^r(S_\alpha^\beta e_{j_0}^\beta, \ldots, S_\alpha^\beta e_{j_r}^\beta)$. Отображение σ_β^α есть гомоморфное отображение группы L_α^r в L_β^r, причем, как легко видеть, $\sigma_\beta^\alpha \nabla f_\alpha^r = \nabla \sigma_\beta^\alpha f_\alpha^r$. Поэтому отображение σ_β^α, примененное к группам Z_α^r и H_α^r, есть гомоморфное отображение этих групп соответственно в группы Z_β^r и H_β^r.

6. Группы $\nabla^r(R, X)$. Множество всех r-мерных ∇-циклов всевозможных покрытий пространства R разбиваем на попарно непересекающиеся классы, называемые *r-мерными ∇-классами пространства* R, относя два цикла f_α^r и f_β^r тогда и только тогда к одному классу, если существует покрытие ε^γ, вписанное и в ε^α и в ε^β, такое, что

$$\sigma_\gamma^\alpha f_\alpha^r - \sigma_\gamma^\beta f_\beta^r \in H_\gamma^r.$$

Для ∇-классов определяем сложение так: пусть u^r и v^r — два ∇-класса и пусть $f_\alpha^r \in u^r$, $f_\beta^r \in v^r$. Берем покрытие ε^γ, вписанное и в ε^α и в ε^β, и рассматриваем цикл

$$f_\gamma^r = \sigma_\gamma^\alpha f_\alpha^r + \sigma_\gamma^\beta f_\beta^r.$$

∇-класс, содержащий цикл f_γ^r, называется суммой ∇-классов u^r и v^r.

Множество всех r-мерных ∇-классов пространства R с только что определенным в нем сложением образует абелеву группу $\nabla^r(R, X)$, называемую r-мерной ∇-группой пространства R.

7. Функции φ_α^r на покрытии ε^α. Пусть Ξ — бикомпактная абелева группа. Для каждого покрытия ε^α пространства R рассматриваем функции $\varphi_\alpha^r = \varphi_\alpha^r(e_{i_0}^\alpha, \ldots, e_{i_r}^\alpha)$ от $r+1$ аргументов $e_i^\alpha \in \varepsilon^\alpha$, со значениями, принадлежащими Ξ, удовлетворяющие следующему условию.

Функция φ_α^r определена лишь для таких $e_{i_0}^\alpha, \ldots, e_{i_r}^\alpha$, что $e_{i_0}^\alpha \supseteq \ldots \supseteq e_{i_r}^\alpha$ и $\bar{e}_{i_r}^\alpha$ бикомпактно, причем в случае совпадения $e_{i_k}^\alpha = e_{i_{k+1}}^\alpha$ хотя бы для одного k имеем $\varphi_\alpha^r(e_{i_0}^\alpha, \ldots, e_{i_r}^\alpha) = 0$. Функции φ_α^r образуют относительно сложения абелеву группу Λ_α^r, которая топологизируется так:

под окрестностью данной функции $\varphi_\alpha^r \in \Lambda_\alpha^r$ понимается совокупность всех функций из Λ_α^r, которые для любых $e_{i_0}^\alpha, \ldots, e_{i_r}^\alpha$ принимают значения, принадлежащие наперед заданным окрестностям (в Ξ) соответствующих значений данной функции φ_α^r. Топологизированная этим способом группа Λ_α^r, как нетрудно видеть, бикомпактна.

8. Граничный оператор Δ ставит в соответствие каждой функции φ^r_α определенную функцию $\Delta\varphi^r_\alpha = \varphi^{r-1}_\alpha$, а именно:

$$\varphi^{r-1}_\alpha(e^\alpha_{i_0}, \ldots, e^\alpha_{i_{r-1}}) = \sum_i (-1)^k \varphi^r_\alpha(e^\alpha_{i_0}, \ldots, e^\alpha_{i_{k-1}}, e^\alpha_i, e^\alpha_{i_k}, \ldots, e^\alpha_{i_{r-1}}),$$

где суммирование распространено на все i, для которых существует такое k, что $\varphi^r_\alpha(e^\alpha_{i_0}, \ldots, e^\alpha_{i_{k-1}}, e^\alpha_i, e^\alpha_{i_k}, \ldots, e^\alpha_{i_{r-1}})$ определено.

Оператор Δ есть непрерывное гомоморфное отображение группы Λ^r_α в группу Λ^{r-1}_α. Ядром этого гомоморфизма является замкнутая в Λ^r (следовательно, бикомпактная) группа Z^r_α всех r-мерных Δ-циклов покрытия ε^α, т. е. всех функций φ^r_α, удовлетворяющих условию $\Delta\varphi^r_\alpha = 0$. Образом группы Λ^r_α при гомоморфизме Δ является группа Γ^{r-1}_α всех $(r-1)$-мерных Δ-циклов, гомологичных нулю: Γ^{r-1}_α состоит из всех тех функций φ^{r-1}_α, для которых существуют такие φ^r_α, что $\Delta\varphi^r_\alpha = \varphi^{r-1}_\alpha$ (в силу соотношения $\Delta\Delta\varphi^r = 0$ все функции $\varphi^{r-1}_\alpha \in \Gamma^{r-1}_\alpha$ оказываются циклами). Как непрерывный образ бикомпактной группы Λ^{r+1}_α, группа Γ^r_α бикомпактна. Фактор-группа $Z^r_\alpha/\Gamma^r_\alpha = \Delta^r_\alpha$ называется r-мерной Δ-группой покрытия ε^α; она бикомпактна; ее элементы называются r-мерными Δ-классами покрытия ε^α.

9. Оператор ρ^β_α. Пусть покрытие ε^β вписано в покрытие ε^α. Каждой функции φ^r_β ставим в соответствие определенную функцию $\rho^\beta_\alpha\varphi^r_\beta = \varphi^r_\alpha$:

$$\varphi^r_\alpha(e^\alpha_{i_0}, \ldots, e^\alpha_{i_r}) = \sum \varphi^r_\beta(e^\beta_{j_0}, \ldots, e^\beta_{j_r}),$$

где суммирование происходит по всем последовательностям $e^\beta_{j_0}, \ldots, e^\beta_{j_r}$, для которых, во-первых, $\varphi^r_\beta(e^\beta_{j_0}, \ldots, e^\beta_{j_r})$ определено, а, во-вторых, $S^\beta_\alpha e^\beta_{j_0} = e^\alpha_{i_0}, \ldots, S^\beta_\alpha e^\beta_{j_r} = e^\alpha_{i_r}$. Отображение ρ^β_α есть непрерывное гомоморфное отображение группы Λ^r_β в группу Λ^r_α, при котором

$$\Delta\rho^\beta_\alpha\varphi^r_\beta = \rho^\beta_\alpha\Delta\varphi^r_\beta.$$

Поэтому ρ^β_α производит гомоморфное отображение групп Z^r_β, Γ^r_β, Δ^r_β соответственно в Z^r_α, Γ^r_α, Δ^r_α. Эти гомоморфизмы будем обозначать через ρ^β_α.

10. Группы $\Delta^r(R, \Xi)$. Множество $\zeta^r = \{\zeta^r_\alpha\}$, состоящее из r-мерных Δ-классов ζ^r_α различных покрытий ε^α, называется *r-мерным Δ-классом* пространства R, если выполнены условия:

1° Каково бы ни было покрытие ε^α, множество ζ^r содержит один и только один r-мерный Δ-класс ζ^r_α покрытия ε^α.

2° Если покрытие ε^β вписано в покрытие ε^α и ζ^r_β и ζ^r_α суть соответствующие этим покрытиям элементы ζ^r, то $\rho^\beta_\alpha\zeta^r_\beta = \zeta^r_\alpha$.

Для r-мерных Δ-классов пространства R определяется сложение по правилу:

$$\{\zeta^r_\alpha\} + \{\zeta'^r_\alpha\} = \{\zeta^r_\alpha + \zeta'^r_\alpha\}.$$

Это определение сложения превращает множество всех r-мерных Δ-классов пространства R в группу $\Delta^r(R, \Xi)$, которую топологизируем следующим образом. Пусть $\zeta^r = \{\zeta^r_\alpha\}$ — произвольный Δ-класс. Выбираем произвольно конечное число покрытий $\varepsilon^{\alpha_1}, \ldots, \varepsilon^{\alpha_\nu}$ и для соответствующих элементов $\zeta^r_{\alpha_1}, \ldots, \zeta^r_{\alpha_\nu}$ класса ζ^r выбираем произвольные окрестности $U(\zeta^r_{\alpha_1}), \ldots, U(\zeta^r_{\alpha_\nu})$ в топологических группах $\Delta^r_{\alpha_1}, \ldots, \Delta^r_{\alpha_\nu}$. Множество всех r-мерных Δ-классов $\zeta'^r = \{\zeta'^r_\alpha\}$, удовлетворяющих условиям $\zeta'^r_{\alpha_1} \in U(\zeta^r_{\alpha_1}), \ldots, \zeta'^r_{\alpha_\nu} \in U(\zeta^r_{\alpha_\nu})$, и образует, по определению, искомую окрестность Δ-класса ζ^r. Топологизированная таким образом группа $\Delta^r(R, \Xi)$ бикомпактна.

11. Двойственность групп $\nabla^r(R, X)$ и $\Delta^r(R, \Xi)$. Пусть группы X и Ξ двойственны в смысле Понтрягина; из этого, в частности, следует, что дан закон коммутативного и дважды дистрибутивного умножения $x\xi \in \Pi$ для $x \in X$, $\xi \in \Xi$, причем Π есть бикомпактная аддитивная группа действительных чисел, приведенных по модулю 1. Умножение $x\xi$ дает скалярное умножение функций f^r_α и φ^r_α:

$$f^r_\alpha \cdot \varphi^r_\alpha = \sum f^r_\alpha(e^\alpha_{i_0}, \ldots, e^\alpha_{i_r})\, \varphi^r(e^\alpha_{i_0}, \ldots, e^\alpha_{i_r}) \in \Pi,$$

где суммирование происходит по всем последовательностям $e^\alpha_{i_0}, \ldots, e^\alpha_{i_r}$, для которых φ^r_α (и следовательно, f^r_α) определено.

В силу скалярного умножения группы L^r_α и Λ^r_α также оказываются двойственными, а операторы ∇ и Δ сопряженными: $f^{r-1} \cdot \Delta\varphi^r = \nabla f^{r-1} \cdot \varphi^r$. Отсюда легко выводится, что группы $\nabla^r_\alpha = Z^r_\alpha / H^r_\alpha$ и Δ^r_α также двойственны, а операторы σ^α_β и ρ^β_α сопряженны: $f^r_\alpha \cdot \rho^\beta_\alpha \varphi^r_\beta = \sigma^\alpha_\beta f^r_\alpha \cdot \varphi^r_\beta$.

Все это приводит к тому, что и группы $\nabla^r(R, X)$ и $\Delta^r(R, \Xi)$ двойственны в силу умножения

$$z^r \cdot \zeta^r = f^r_\alpha \cdot \varphi^r_\alpha,$$

где $z^r \in \nabla^r(R, X)$, $\zeta^r \in \Delta^r(R, \Xi)$, $f^r_\alpha \in z^r$, $\zeta^r_\alpha \in \zeta^r$, $\varphi^r_\alpha \in \zeta^r_\alpha$ произвольны, результат не зависит от произвола в выборе $f^r_\alpha \in z^r$, $\varphi^r_\alpha \in \zeta^r_\alpha$.

12. Кольцо гомологий. Пусть X—коммутативное кольцо. Для любых двух функций $f^p_\alpha \in L^p_\alpha$, $f^q_\alpha \in L^q_\alpha$ определяем функцию $(f^p_\alpha \times f^q_\alpha) = f^{p+q}_\alpha$, полагая для любой последовательности $e^\alpha_{i_0} \supseteq \ldots \supseteq e^\alpha_{i_{p+q}}$

$$f^{p+q}_\alpha(e^\alpha_{i_0}, \ldots, e^\alpha_{i_{p+q}}) = f^p(e^\alpha_{i_0}, \ldots, e^\alpha_{i_p})\, f^q(e^\alpha_{i_p}, \ldots, e^\alpha_{i_{p+q}}).$$

Эта операция перемножения функций порождает операцию перемножения p- и q-мерных ∇-классов пространства R: если $z^p \in \nabla^p(R, X)$, $z^q \in \nabla^q(R, X)$, $f^p_\alpha \in z^p$, $f^q_\alpha \in z^q$, то под $(z^p_p \times z^q)$ понимаем $(p+q)$-мерный ∇-класс, содержащий цикл $(f^p_\alpha \times f^q_\alpha)$. Результат не зависит от выбора $f^p_\alpha \in z^p$, $f^q_\alpha \in z^q$.

Наше определение умножения ∇-классов пространства R превращает прямую сумму $\nabla(R, X)$ групп $\nabla^r(R, X)$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, в кольцо. Кольцо это называется кольцом гомологий пространства R.

Поступило
21 I 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Колмогоров, четыре заметки в Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, **202**, 1144, 1325, 1558, 1641 (1936). [2] Alexander, On the Connectivity Ring of an Abstract Space, Annals of Math., **37**, 698—708 (1936). [3] Alexander, A Theory of Connectivity in Terms of Gratings, Annals of Math., **39**, 883—912 (1938). [4] Steenrod, Universal Homology Groups, Amer. Journ. of Math., **48**, 661—701 (1936). [5] Alexandroff, Gestalt und Lage, Annals of Math., **30**, 101—187 (1929); Diskrete Räume, Мат. сб., **2**, 501—519 (1937). [6] Александров, Общая теория гомологии, печатается в Уч. зап. Моск. гос. ун-та. [7] M. Kline, Note on Homology Theory for Locally Bicompact Spaces, Fund. Math., **32**, 64—68 (1939).