Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 7

МАТЕМАТИКА

П. АЛЕКСАНДРОВ, член-корреспондент Академии Наук СССР

О РАЗМЕРНОСТИ БИКОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

1. Предварительные понятия. Кратностью конечной системы множеств называется наибольшее из таких целых чисел n, что в этой системе имеется n элементов с непустым пересечением. Конечная система подмножеств множества R называется покрытием множества R, если сумма множеств этой системы совпадает с R. Покрытие топологического пространства R называется открытым, если элементы покрытия суть открытые множества пространства R, замкнутым,—если элементы покрытия суть замкнутые множества пространства R. Покрытие $\mathfrak{s}'$ называется вписанным в покрытие $\mathfrak{s}$, если каждый элемент $\mathfrak{s}'$ содержится хотя бы в одном элементе покрытия $\mathfrak{s}$.

В дальнейшем R всегда обозначает нормальное пространство, ω_R, ω'_R и т. д. обозначают открытое покрытие пространства R, α_R, α'_R и т. д. обозначают замкнутое покрытие пространства R.

Известны следующие факты [(1), стр. 72, 73]:

A. Для всякого $\alpha_R=\{a_1, \ldots, a_s\}$ существует такое $\omega_R=\{o_1, \ldots, o_s\}$, что $a_i \subseteq o_i$ и из $a_{i_1} \frown \ldots \frown a_{i_r}=0$ для каких-нибудь $i_1, \ldots, i_r$ всегда следует $o_{i_1} \frown \ldots \frown o_{i_r}=0$.

B. Для всякого $\omega_R=\{o_1, \ldots, o_s\}$ существует такое $\alpha_R=\{a_1, \ldots, a_s\}$, что $a_i \subseteq o_i$ и из $a_{i_1} \frown \ldots \frown a_{i_r}=0$ следует $o_{i_1} \frown \ldots \frown o_{i_r}=0$.

Напомним, наконец, что размерностью нормального пространства R называется наименьшее из таких целых чисел n, что во всякое ω_R можно вписать ω'_R кратности $n+1$. На основании теорем A и B размерность R может быть также определена как наименьшее из таких n, что во всякое ω_R может быть вписано α_R кратности $n+1$. Если такого числа n нет, то размерность R по определению равна ∞. Размерность пространства R обозначается через $\dim R$.

2. Усиление теоремы Н. Б. Веденисова. При данных R и ω_R непрерывное отображение f пространства R в какое-нибудь пространство R' называется ω_R-отображением, если для каждой точки $x' \in R'$ имеется хоть одно такое $o_i \in \omega_R$, что $f^{-1}(x') \subseteq o_i$.

А. Н. Тихонов (2) доказал следующую теорему: Если R есть бикомпакт (т. е. бикомпактное хаусдорфово пространство), то для всякого ω_R существует ω_R-отображение в некоторое эвклидово пространство.

Н. Б. Веденисов (3) доказал, что для нормального R размерности n, удовлетворяющего условию:

(F) всякое замкнутое множество есть G_δ,

при всяком ω_R существует ω_R-отображение на полиэдр размерности n.

В этом параграфе мы хотим показать, что в теореме Веденисова условие (F) является излишним, т. е. что подчеркнутое нами утверждение этой теоремы справедливо для всех без исключения нормальных пространств размерности n.

Для этого сформулируем сначала следующую основную лемму, представляющую при всей своей элементарности и самостоятельный интерес:

Лемма 1. *Пусть A есть замкнутое множество нормального пространства R. Какова бы ни была окрестность $O(A)$ множества A, существует такое замкнутое G_δ-множество A_0 (т. е. замкнутое множество, являющееся множеством всех нулей некоторой действительной непрерывной функции, определенной во всем R), что $A \subseteq A_0 \subseteq O(A)$.*

Замечание. То обстоятельство, что в нормальных пространствах замкнутые G_δ-множества совпадают с множествами нулей непрерывных функций, следует из результатов Н. Б. Веденисова ([3]).

Для доказательства леммы достаточно заметить, что в силу известной теоремы Урысона существует непрерывная функция $f(x)$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, определенная во всем R, равная нулю на A и равная единице на $R - O(A)$. Искомое множество A_0 определяем как множество всех нулей функции $f(x)$.

Из леммы 1 вытекает

Лемма 2. *Для всякого $\omega_R = \{o_1, \ldots, o_s\}$ существует такое $\omega'_R = \{o'_1, \ldots, o'_s\}$, что $o'_i \subseteq o_i$ и что o' суть F_σ-множества.*

В самом деле, строим такое $\alpha_R = \{a_1, \ldots, a_s\}$, что $a_i \subseteq o_i$, и находим для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant s$, замкнутое G_δ-множество a'_i, удовлетворяющее условию $R - o_i \subseteq a'_i \subseteq R - a_i$. Искомое ω'_R состоит из $o'_i = R - a'_i$.

Лемма 3. *Для всякого ω_R существует ω_R-отображение в нерв ω_R, рассматриваемый как полиэдр.*

Для доказательства строим на основании леммы 2 покрытие $\omega'_R = \{o'_1, \ldots, o'_s\}$, состоящее из открытых F_σ-множеств $o'_i \subseteq o_i \in \omega_R$. Каждое из множеств $R - o'_i$ есть множество всех нулей некоторой непрерывной функции $\mu_i(x)$, $0 \leqslant \mu_i(x) \leqslant 1$. Берем эвклидову реализацию K^n нерва ω'_R в эвклидовом пространстве R^{2n+1}, с вершинами $c_i \sim o_i$. Ставим в соответствие каждой точке $x \in R$ точку $\mu(x)$ полиэдра K^n, а именно центр тяжести масс $\mu_i(x)$, помещенных соответственно в c_i. Отображение $\mu(x)$ есть искомое.

Из леммы 3 и определения размерности непосредственно следует, что при $\dim R = n$ для всякого ω_R существует ω_R-отображение в полиэдр размерности n: достаточно взять ω'_R кратности $n+1$, вписанное в ω_R, и рассмотреть ω'_R-отображение в нерв ω'_R.

3. Основные теоремы. Лемма 4. *Ко всякому ω_R-отображению f бикомпакта R в бикомпакт R' можно найти такое $\omega_{R'}$, что для любого $o'_k \in \omega_{R'}$ имеется $o_i \in \omega_R$, удовлетворяющее условию $f^{-1}(o'_k) \subseteq o_i$. В частности, если R' метрично, то существует такое $\varepsilon > 0$, что прообраз $f^{-1}(M)$ всякого множества $M \subseteq R$, диаметр которого меньше ε, содержится в некотором $o_i \in \omega_R$.*

Для доказательства достаточно построить для каждого $x' \in R'$ окрестность, прообраз которой лежит в некотором $o_i \in \omega_R$. Пусть $f^{-1}(x') \in o_i$. Множество $f(R - o_i) = F' \subseteq R' - x'$ замкнуто, и $R - F'$ есть искомая окрестность точки x'.

Из леммы 4 легко следует

Теорема I (*брауэровский принцип инвариантности*). *Для всякого n-мерного бикомпакта R существует такое ω_R, что невозможно никакое ω_R-отображение в бикомпакт размерности меньшей, чем n.*

Если дано ω_R-отображение бикомпакта R в полиэдр P, то метрический случай леммы 4 позволяет применить к достаточно мелкому симплициальному разбиению P известный процесс выметания [([1]), стр. 365] и таким образом доказать следующие факты: 1°. Для всякого n-мерного бикомпакта R и всякого ω_R существует ω_R-отображение на n-мерный полиэдр. 2° Для всякого n-мерного бикомпакта R существует такое ω_R, что при всяком ω_R-отображении в полиэдр некоторые n-мерные симплексы этого полиэдра будут покрыты существенным образом [(1), стр. 372]. 3° Всякий n-мерный бикомпакт может быть существенно отображен на n-мерный симплекс.

Чтобы доказать, что бикомпакт размерности $r < n$ не может быть существенно отображен на n-мерный симплекс, построим для данного бикомпакта R, его непрерывного отображения f в R^n, для данного $\varepsilon > 0$ и всякого достаточно мелкого (т. е. вписанного в некоторое фиксированное ω_R^1) покрытия ω_R такое непрерывное отображение $f_{\varepsilon, \omega}$ бикомпакта R в надлежаще реализованный в R^n нерв покрытия ω_R, что

$$\rho(f(x), f_{\varepsilon, \omega}(x)) < \varepsilon$$

для любого $x \in R$. Из существования такого $f_{\varepsilon, \omega}$ следует, что ко всякому непрерывному отображению f данного r-мерного бикомпакта R в эвклидово R^n можно подобрать сколь-угодно мало отличающееся от f отображение f' в r-мерный полиэдр $P \subset R^n$. С другой стороны, если f есть существенное отображение бикомпакта R на n-мерный шар V^n, то всякое отображение f', достаточно мало отличающееся от f, покрывает некоторый меньший шар v^n, концентричный к V^n [это последнее утверждение доказывается совершенно так же, как аналогичное утверждение для компактов в (1), стр. 374—375]. Из этих двух утверждений с очевидностью следует невозможность существенного отображения r-мерного бикомпакта на шар или симплекс размерности $n > r$.

Что касается отображения $f_{\varepsilon, \omega}$, то оно строится так. К данному $\varepsilon > 0$ подбираем прежде всего такое ω_R^1, что для двух точек x_1 и x_2, принадлежащих к одному какому-нибудь $o_i^1 \in \omega_R^1$, всегда имеем

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

Пусть $\omega_R = \{o_1, \ldots, o_s\}$ вписано в ω_R^1. Не нарушая общности рассуждений, можем предположить, что все o_i суть открытые F_σ-множества. Для $i = 1, 2, \ldots, s$ берем $p_i \in o_i$ и $c_i = f(p_i)$, после чего, как в § 2, строим функции $\mu_i(x)$, имеющие соответственно множества $R - o_i$ множествами своих нулей, и определяем $f_{\varepsilon, \omega}(x) = \mu(x)$ как центр тяжести масс $\mu_i(x)$, помещенных соответственно в c_i.

Из всего доказанного следует

Теорема II. *Размерность бикомпакта R есть наименьшее из всех тех целых чисел n, для которых при всяком ω_R существует ω_R-отображение на полиэдр размерности n.*

Замечание. Одна половина этой теоремы полностью доказана Веденисовым [(3), лемма 4], вторая, как уже упоминалось, доказана Веденисовым лишь в предположении условия (F).

Теорема III. *Размерность бикомпакта R есть наибольшее из всех тех целых чисел n, для которых имеется существенное отображение бикомпакта R на n-мерный симплекс.*

Пользуясь теоремой III, можно построить для бикомпактов гомологическую теорию размерности, что я предполагаю сделать в дальнейших публикациях.

Методом, аналогичным доказательству теоремы Менгера-Небелинга [(1), стр. 368—369], получаем следующую теорему.

Теорема IV. *Пусть R—бикомпакт; пусть R' есть в случае $\dim R = n$ куб размерности $2n+1$, а в случае $\dim R = \infty$ гильбертов параллеле-*

пипед. Пусть $\omega_R^1, \omega_R^2, \ldots, \omega_R^m, \ldots$ *есть произвольная счетная последовательность открытых покрытий пространства* R. *Существует непрерывное отображение* f *бикомпакта* R *в* R', *удовлетворяющее условию: для каждой точки* $x' \in R'$ *можно во всех покрытиях* ω_R^m *одновременно найти по элементу* o^m, *содержащему прообраз* $f^{-1}(x')$ *точки* x'.

4. Заметим в заключение, что из леммы 1 непосредственно следует, что всякое замкнутое множество нормального пространства есть пересечение замкнутых G_δ-множеств, т. е. что открытые F_σ-множества нормального пространства R образуют базис пространства R.

Если R есть бикомпакт, то замкнутые множества $a \subseteq R$ образуют бикомпакт $A(R)$ при следующем определении окрестностей. Пусть a — произвольное замкнутое множество в R. Берем произвольное $\omega_R = \{o_1, \ldots, o_s\}$, в котором пусть $o_1, \ldots, o_\nu$, и только эти элементы пересекаются с a. Окрестность $O_\omega(a)$ точки $a \in A(R)$ по определению состоит из всех тех $a' \in A(R)$, которые лежат в сумме $o_1 \smile \ldots \smile o_\nu$ и пересекаются с каждым o_i, $1 \leqslant i \leqslant \nu$. Легко видеть, что множество замкнутых G_δ-множеств бикомпакта R всюду плотно в $A(R)$.

Поступило
21 I 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Alexandroff-Hopf, Topologie, I, Berlin, Springer (1935). [2] A. Tychonoff, Math. Ann., III, 760—761 (1935). [3] N. Vedenissoff, Comp. math., 7, 194—200 (1939).