Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 9

МАТЕМАТИКА

Академик С. Н. БЕРНШТЕЙН

К ВОПРОСУ О ЛОКАЛЬНОМ НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ

Докажем следующую теорему.

Теорема. *Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы функция $f(x)$ имела непрерывную производную порядка $n+1$ во всех точках отрезка (a, b), заключается в том, что*

$$\frac{E_n(f(x);\ (\alpha, \beta))}{(\beta-\alpha)^{n+1}} \longrightarrow \lambda(x_0) \geqslant 0 \quad (a \leqslant x_0 \leqslant b) \tag{1}$$

равномерно при $\beta \longrightarrow x_0$, $\alpha \longrightarrow x_0$ $(\beta > \alpha)$, где непрерывная функция $\lambda(x)$ определяется равенством

$$(n+1)!\, 2^{2n+1} \lambda(x) = |f^{(n+1)}(x)|. \tag{2}$$

Для этого докажем сначала лемму:

Лемма I. *Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную $(n+1)$-го порядка справа $\overset{+}{f}{}^{(n+1)}(x_0)$, то*

$$\frac{E_n(f(x);\ (x_0, \beta))}{(\beta-x_0)^{n+1}} \longrightarrow \frac{|\overset{+}{f}{}^{(n+1)}(x_0)|}{(n+1)!\, 2^{2n+1}},$$

где $\beta \longrightarrow x_0$ при $\beta > x_0$; аналогичное свойство справедливо для производной слева $\overset{-}{f}{}^{(n+1)}(x_0)$. Если в точке x_0 существуют производные до $n+1$-го порядка включительно, т. е. $\overset{+}{f}{}^{(i)}(x_0) = \overset{-}{f}{}^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$ при $i \leqslant n+1$, то, кроме того,

$$\frac{E_n(f(x);\ (\alpha, \beta))}{(\beta-\alpha)^{n+1}} \longrightarrow \frac{|f^{(n+1)}(x_0)|}{(n+1)!\, 2^{2n+1}},$$

если $\alpha \longrightarrow x_0$, $\beta \longrightarrow x_0$ при $\alpha < x_0 < \beta$.

Действительно,

$$f(x) = f(x_0) + \overset{+}{f}{}'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{\overset{+}{f}{}^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \\ + [\overset{+}{f}{}^{(n+1)}(x_0) + \varepsilon]\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $\varepsilon \to 0$, если $x \to x_0$ справа. Поэтому

$$\left| E_n\left(f(x);\ (x_0, \beta)\right) - \frac{|\overset{+}{f}{}^{(n+1)}(x_0)|\,(\beta - x_0)^{n+1}}{(n+1)!\ 2^{2n+1}} \right| < \frac{\varepsilon\,(\beta - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Аналогичным образом доказывается и вторая часть леммы.

Для доказательства необходимости условия, высказанного в теореме, следует еще заметить, что в случае непрерывности $f^{(n+1)}(x)$ на отрезке (a, b) в равенстве

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \ldots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + \left(f^{(n+1)}(\alpha) + \varepsilon\right)\frac{(x-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!}$$

ε стремится равномерно к нулю вместе с $\beta - \alpha$ при $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ и $f^{(n+1)}(\alpha) - f^{(n+1)}(x_0)$ равномерно стремится к нулю вместе с $x_0 - \alpha$.

Доказательство достаточности условия нашей теоремы менее просто, так как лемма I необратима. Для этого нам понадобятся еще три леммы:

Лемма II. *Пусть $f(x, \lambda)$ есть непрерывная функция относительно x, λ при $a \leqslant x \leqslant b$, $\lambda_0 < \lambda < \lambda_1$ и $P_n(x, \lambda)$—многочлен степени n относительно x, наименее уклоняющийся от $f(x, \lambda)$ на (a, b). Если в крайних справа точках максимального отклонения ξ_{λ_0} и ξ_{λ_1}, соответствующих $\lambda = \lambda_0$ и $\lambda = \lambda_1$, знаки разностей $f(\xi_{\lambda_0}, \lambda_0) - P_n(\xi_{\lambda_0}, \lambda_0)$ и $f(\xi_{\lambda_1}, \lambda_1) - P_n(\xi_{\lambda_1}, \lambda_1)$ противоположны, то существует значение $\lambda = \lambda_2$ между λ_0 и λ_1, для которого число точек максимального отклонения $f(x, \lambda_2) - P_n(x, \lambda_2)$ противоположного знака не менее, чем $n+3$.*

В самом деле, пусть $P_{n+1}(x, \lambda) = A_\lambda x^{n+1} + \ldots$ будет многочленом степени $n+1$, наименее уклоняющимся от $f(x, \lambda)$; как известно, коэффициенты его и, в частности, A_λ будут непрерывными функциями λ. С другой стороны,

$$P_{n+1}(x, \lambda) - P_n(x, \lambda) = f(x, \lambda) - P_n(x, \lambda) - [f(x, \lambda) - P_{n+1}(x, \lambda)]$$

получает знак разности $f(x, \lambda) - P_n(x, \lambda)$ во всех точках максимального отклонения последней, если только многочлены $P_n(x, \lambda)$ и $P_{n+1}(x, \lambda)$ не тождественны между собой (т. е. $A_\lambda = 0$). Таким образом, если уравнение $P_{n+1}(x, \lambda) - P_n(x, \lambda) = 0$ не удовлетворено тождественно для некоторого λ, то все его корни вещественны и менее ξ_λ, а потому знак $f(\xi_\lambda, \lambda) - P_n(\xi_\lambda, \lambda)$ совпадает с знаком A_λ. Следовательно, $A_{\lambda_0}A_{\lambda_1} \leqslant 0$, откуда заключаем, что $A_\lambda = 0$ для некоторого $\lambda = \lambda_2$ между λ_0 и λ_1, т. е. при $\lambda = \lambda_2$ многочлены $P_{n+1}(x, \lambda)$ и $P_n(x, \lambda)$ тождественны.

Лемма III (Д. А. Райкова *). *Если при любых $\alpha < \beta$ на отрезке (a, b)*

$$E_n\left(f(x);\ (\alpha, \beta)\right) < C\,(\beta - \alpha)^{n+1}, \tag{3}$$

где C—постоянная (не зависящая от α, β), то функция $f(x)$ имеет производные до n-го порядка включительно во всех точках (a, b) и существует такая постоянная C_1 (не зависящая от α, β), что

$$|f^{(n)}(\beta) - f^{(n)}(\alpha)| < C_1(\beta - \alpha). \tag{4}$$

---

* В своей статье (1) Д. А. Райков приводит некоторые из результатов моей монографии «Sur les propriétés extrémales des fonctions analytiques» (2) и отмечает, между прочим, недостаточность данного там доказательства следующего вспомогательного предложения: если непрерывная функция $f(x)$ имеет $n+1$ корней на отрезке (a, b), то существует такое $\delta_0 > 0$, что при всяком положительном $\delta \leqslant \delta_0$ уравнение $\Delta_{n,\delta} = f(x + n\delta) - nf(x + \overline{n-1}\delta) + \ldots = 0$ имеет не менее одного корня. В действительности, дополнительное замечание, необходимое для строгости вывода, имеется в моей статье (3) 1914 г., где это предложение было дано впервые (стр. 452).

Лемма IV. *Если соблюдено* (4) и

$$C_0(\beta-\alpha)^{n+1} < E_n(f(x);\ (\alpha, \beta)) \quad (C_0 > 0), \tag{5}$$

то расстояние между точками наибольшего отклонения противоположного знака многочлена $P_n(x)$ степени n, наименее уклоняющегося от $f(x)$ на отрезке (α, β), удовлетворяет неравенству

$$|x_{i+1}-x_i| > k(\beta-\alpha), \tag{6}$$

где $k = \frac{2(n-1)!}{4n+1}\frac{C_0}{C_1}$.

Для $n=0$, очевидно, можно положить * $k=\frac{2C_0}{C_1}$; поэтому предположим $n>0$; тогда вследствие (4)

$$|f(x)-f_n(x)| < \frac{C_1}{n!}(\beta-\alpha)^{n+1}, \quad |f'(x)-f_n'(x)| < \frac{C_1}{(n-1)!}(\beta-\alpha)^n$$

при

$$\alpha \leqslant x \leqslant \beta,$$

где

$$f_n(x) = f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)+\ \ldots\ +\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n.$$

В таком случае

$$|P_n(x)=f_n(x)| < \frac{2C_1}{n!}(\beta-\alpha)^{n+1} \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta)$$

и вследствие теоремы Маркова

$$|P_n'(x)-f_n'(x)| < \frac{4nC_1}{(n-1)!}(\beta-\alpha)^n;$$

откуда

$$|f'(x)-P_n'(x)| < C_2(\beta-\alpha)^n \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta),$$

где $C_2 = \frac{4n+1}{(n-1)!}C_1$. Поэтому из

$$\left|f(x_{i+1})-P_n(x_{i+1})-\left(f(x_i)-P_n(x_i)\right)\right| = 2\,E_n(f(x);\ (\alpha, \beta))$$

следует, что

$$C_2(\beta-\alpha)^n|x_{i+1}-x_i| > 2E_n(f(x);\ (\alpha, \beta)) > 2C_0(\beta-\alpha)^{n+1},$$

а потому

$$|x_{i+1}-x_i| > \frac{2C_0}{C_2}(\beta-\alpha). \tag{6}$$

Допустим теперь, что (1) имеет место равномерно на всем отрезке (a, b). Согласно известной теореме Лебега из леммы III следует, что функция $f^{(n)}(x)$ имеет производную $f^{(n+1)}(x)$ почти всюду на (a, b) и по лемме I в этих точках

$$f^{(n+1)}(x_0) = (n+1)!\ 2^{2n+1}\delta(x_0)\lambda(x_0), \tag{7}$$

---

* Вообще для $n=0$ доказательство высказанной в начале теоремы (которая в этом случае дает условие, необходимое и достаточное для существования непрерывной производной) может быть проведено гораздо проще.

где $\delta(x_0)=\pm 1$, причем [в случае $\lambda(x_0)>0$] знак $f^{(n+1)}(x_0)$ совпадает с знаком $f(x)-P_n(x)$ в крайней правой точке максимального отклонения на достаточно малом отрезке (α, β), включающем x_0. Пусть $\lambda(x)>0$ во всех точках отрезка (a', b'); согласно лемме IV число точек максимального отклонения, соответствующих достаточно малым промежуткам (α, β) внутри (a', b'), равно $n+2$ [так как в противном случае мы имели бы $E_n(f(x);\ (\alpha, \beta))=E_n(f(x);\ (\alpha, \beta_1))$, где $\beta_1=\beta-k(\beta-\alpha)$, причем $k\geqslant k_0>0$ ограничено снизу, поскольку минимум $\lambda(x)$ на (a', b') отличен от нуля и для $\beta-\alpha$ указана некоторая общая для всего отрезка верхняя граница]. Поэтому вследствие леммы II знак максимального крайне правого отклонения для всех этих промежутков (α, β) одинаков, откуда заключаем, что во всех точках (a', b'), где производная $f^{(n+1)}(x_0)$ существует, знак ее, т. е. $\delta(x_0)$, остается постоянным. Таким образом на всем отрезке (a, b)

$$f^{(n)}(x)=f^{(n)}(x_0)+\int_{x_0}^{x}(n+1)!\,2^{2n+1}\delta(x)\,\lambda(x)\,dx, \tag{8}$$

где $\delta(x)$ может иметь разрывы лишь при $\lambda(x)=0$, а потому подинтегральная функция в правой части равенства (8) непрерывна и представляет производную левой его части во всех точках (a, b), т. е. формула (7) или эквивалентная ей формула (2) справедлива на всем отрезке (a, b).

Из доказательства видно, что теорема остается в силе, если рассматривать одни лишь интервалы (α, β), где $x_0=\frac{\alpha+\beta}{2}$, а также и тогда, когда условие (1) равномерно выполняется только для некоторого исчислимого множества стремящихся к нулю значений $(\beta-\alpha)$. Что касается концов (a, b), то само собой понятно, что при дополнительном предположении, что $(a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b)$, в точках b и a следует соответственно иметь в виду лишь производную слева $\overline{f}^{(n+1)}(b)$ и производную справа $\overset{+}{f}{}^{(n+1)}(a)$.

Поступило
19 I 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. А. Райков, ДАН, XXIV, № 7 (1939). [2] S. Bernstein, Leçons sur les propriétés extrémales des fonctions analytiques, Paris, Gauthier-Villars (1926). [3] S. Bernstein, Math. Ann., **65** (1914).