Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 2

МАТЕМАТИКА

Академик АН УССР Г. В. ПФЕЙФФЕР

ПОЛУЧЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ИНТЕГРАЛОВ LAGRANGE'а

Настоящая статья — продолжение нашей предшествующей статьи [1].

Остановимся на полных системах нелинейных уравнений с частными производными первого порядка:

$$\text{A)}\quad \left.\begin{array}{l} F_1(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0, \end{array}\right\} \tag{1}$$

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(p_1, p_2, \ldots, p_m)} \neq 0; \tag{2}$$

$$\text{B)}\quad \left.\begin{array}{l} f_1\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{p_1}{p_n}, \ldots, \frac{p_{n-1}}{p_n}\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{p_1}{p_n}, \ldots, \frac{p_{n-1}}{p_n}\right) = 0, \end{array}\right\} \tag{3}$$

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{D\left(\frac{p_1}{p_n}, \frac{p_2}{p_n}, \ldots, \frac{p_m}{p_n}\right)} \neq 0. \tag{4}$$

Обычно к системе A) присоединяются уравнения:

$$\left.\begin{array}{l} F_{m+1}(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a_{n-1}, \end{array}\right\} \tag{5}$$

составляющие совместно с уравнениями (1) полную систему, обладающую свойством:

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(p_1, p_2, \ldots, p_n)} \neq 0. \tag{6}$$

Решив уравнения (1), (5) относительно $p_1, p_2, \ldots, p_n$, получим помощью квадратуры полный интеграл Лагранжа системы A)

$$z = \theta(x_1, \ldots, x_n, a_m, \ldots, a_{n-1}) + a_n \tag{7}$$

с добавочной произвольной постоянной.

Можно поступить иначе: присоединим к системе A) уравнения:

$$\left.\begin{array}{l} G_{m+1}(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = a_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = a_n, \end{array}\right\} \tag{8}$$

среди которых хоть одно не содержит z линейно с постоянным коэффициентом, и потребуем, чтобы они совместно с уравнениями (1) составляли полную систему, обладающую свойством

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_m, G_{m+1}, \ldots G_{n+1})}{D(z, p_1, p_2, \ldots, p_n)} \neq 0. \tag{9}$$

Решив уравнения (1), (8) относительно $z, p_1, p_2, \ldots, p_n$, найдем полный интеграл Лагранжа системы А):

$$z = \Phi(x_1, \ldots, x_n, a_m, \ldots, a_n) \tag{10}$$

без добавочной произвольной постоянной.

Переходим к системе В).

Наиболее естественно к системе В) присоединить уравнения того же вида:

$$\left.\begin{array}{l} f_{m+1}\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{p_1}{p_n}, \ldots, \frac{p_{n-1}}{p_n}\right) = a_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n-1}\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{p_1}{p_n}, \ldots, \frac{p_{n-1}}{p_n}\right) = a_{n-2}, \end{array}\right\} \tag{11}$$

составляющие совместно с уравнениями (3) полную систему, обладающую свойством

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})}{D\left(\frac{p_1}{p_n}, \frac{p_2}{p_n}, \ldots, \frac{p_{n-1}}{p_n}\right)} \neq 0. \tag{12}$$

Решив уравнения (3), (11) относительно

$$\frac{p_1}{p_n}, \frac{p_2}{p_n}, \ldots, \frac{p_{n-1}}{p_n}, \tag{13}$$

получим систему $(n-1)$-го линейного однородного уравнения с одним интегралом:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, a_m, \ldots, a_{n-2}), \tag{14}$$

по которому построим интеграл A. Mayer'а ([2]) системы В)

$$z = a_{n-1}\varphi(x_1, \ldots, x_n, a_m, \ldots, a_{n-2}) + a_n \tag{15}$$

с произвольным постоянным множителем и добавочной произвольной постоянной.

Обычно к системе В) присоединяют уравнения (5), составляющие с уравнениями (3) полную систему, обладающую свойством:

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_m, F_{m+1}, \ldots, F_n)}{D(p_1, p_2, \ldots, p_n)} \neq 0. \tag{16}$$

Решив уравнения (3), (5) относительно $p_1, p_2, \ldots, p_n$, помощью квадратуры найдем полный интеграл Лагранжа системы В) — (7) с добавочной произвольной постоянной, но без произвольного постоянного множителя.

Можно к системе В) присоединить уравнения (8), среди которых хоть одно не содержит z линейно с постоянным коэффициентом, и потребовать, чтобы уравнения (3), (8) представляли полную систему, обладающую свойством:

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_m, G_{m+1}, \ldots, G_{n+1})}{D(z, p_1, p_2, \ldots, p_n)} \neq 0. \tag{17}$$

Решив уравнения (3), (8) относительно $z, p_1, \ldots, p_n$, найдем полный интеграл Лагранжа системы B) — (10) без добавочной произвольной постоянной.

В 1929 г. [3] нами был дан такой пример: уравнению

$$pq = 4xy \tag{18}$$

принадлежат полные интегралы:

$$z = \frac{ax^2}{2} + \frac{2y^2}{a} + b \tag{19}$$

с добавочной произвольной постоянной и

$$z = 2\sqrt{(x^2+\alpha)(y^2+\beta)} \tag{20}$$

без добавочной произвольной постоянной.

В настоящей статье представлено исчерпывающее решение поставленного вопроса.

Поступило
2 III 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Пфейффер, ДАН, XXIII, № 2 (1939). [2] A. Mayer, Math. Ann., III (1877). [3] Г. Пфейффер, Зап. фіз.-мат. відд. УАН, IV (1929); Bull. des Sci. Math., LIII, S. 2 (1929).