Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 1

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Г. Л. ПОЛЯК

УРАВНЕНИЯ ЛУЧИСТОГО ТЕПЛООБМЕНА ПРИ НАЛИЧИИ ЛУЧЕПОГЛОЩАЮЩЕЙ И РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЫ, СОСТАВЛЕННЫЕ НА РЕЗУЛЬТАТИВНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

(Представлено академиком М. В. Кирпичевым 16 I 1940)

1. Лучистые сальдо (результативные потоки). В предыдущей статье указано, что общие уравнения лучистого обмена, данные в статье, вырождаются в тождества, когда рассеянием лучистой энергии средой и отражением ее от стенок можно пренебречь. Ниже даны общие уравнения, охватывающие как этот случай, так и другие, имеющие значение для расчетов теплообмена в топочных и печных устройствах. Обозначения такие же, как и в предыдущей статье.

В вопросах лучистого теплообмена большое значение имеет разность между приходом и расходом лучистой энергии, отнесенная к элементу поверхности тела и к элементу объема среды. В моей работе [1] этот вопрос был рассмотрен применительно к интегральному (по всему спектру) излучению твердых тел. Ниже дано обобщение этих вопросов при наличии лучепоглощающих и рассеивающих сред.

Лучистое сальдо может быть вычислено по разности между поглощением и собственным излучением или же по разности между суммой из поглощенного и рассеянного излучения и эффективным излучением

$$s_c = I_{\text{погл}} - I_{\text{соб}} = I_{\text{пад}} - I_{\text{эф}}, \tag{1}$$

$$\sigma = \eta_{\text{погл}} - \eta_{\text{соб}} = \eta_{\text{погл+расс}} - \eta_{\text{эф}}. \tag{2}$$

Здесь $s_c\left[\frac{\text{ккал}}{\text{м}^2\cdot\text{м}\cdot\text{ч}}\right]$ результативный спектральный поток через единицу поверхности тела (сальдо интенсивность стенки). В дальнейшем обозначается через s (без нижнего указателя), $\sigma\left[\frac{\text{ккал}}{\text{м}^3\cdot\text{м}\cdot\text{ч}}\right]$ — результативный спектральный поток единицы объема среды (сальдо интенсивность объема). Имеем также

$$\sigma = \alpha e_0 - \eta_{\text{соб}} = k e_0 - \eta_{\text{эф}}, \tag{2'}$$

где

$$e_0 = \int\limits_{(4\pi)} b\, d\omega$$

есть функция места. Яркость b определяется на основании формулы (4) предыдущей статьи.

Мною получено

$$I_{эф} = \frac{R}{A} s + I_{ос}, \tag{1а}$$

$$\eta_{эф} = \frac{\beta}{\alpha} \sigma + k\eta_0, \tag{2а}$$

где

$$I_{ос} = \frac{I_{соб}}{A} \quad \text{и} \quad \eta_0 = \frac{\eta_{соб}}{\alpha}.$$

Тела вообще всегда испускают кроме теплового излучения и нетепловое (люминисценцию). Собственное излучение, испускаемое элементом поверхности какого-либо тела или объема среды в окружающее пространство, а также способность поглощения и рассеяния зависит только от процессов, происходящих внутри элемента (гипотеза Прево). В топочных пространствах люминисценция, повидимому, не имеет существенного значения; поэтому последней пренебрегаем и считаем, что собственное излучение элемента является только температурным. При этом условии к собственному излучению элемента поверхности тела или объема среды возможно приложить классические законы теплового излучения Кирхгофа и Планка. Поэтому $I_{ос} = I_0(\lambda, T_с)$ представляет спектральную интенсивность полусферического излучения абсолютно черного тела при температуре поверхности стенки ($T_с$). Функция $I_0(\lambda, T)$ определяется по известному уравнению Планка. Величина $\eta_0 = 4I_0(\lambda, T)$ представляет учетверенную спектральную интенсивность полусферического излучения абсолютно черного тела при температуре рассматриваемого элемента среды.

Из (1а) и (2а) вытекает:

$$\text{когда} \quad s = 0, \quad I_{эф} = \frac{I_{соб}}{A} = \frac{I_{отр}}{R} = I_{ос},$$

$$\text{когда} \quad \sigma = 0, \quad \frac{\eta_{эф}}{k} = \frac{\eta_{соб}}{\alpha} = \frac{\eta_{расс}}{\beta} = \eta_0.$$

В том частном случае, когда имеет место термодинамическое равновесие, поверхностные и объемные сальдо на основании второго начала всюду равны нулю.

Из полученных уравнений следует также:

$$\text{когда} \quad s > 0, \quad \frac{I_{отр}}{R} \geqslant I_{эф} \geqslant \frac{I_{соб}}{A} = I_{ос},$$

$$\text{когда} \quad \sigma > 0, \quad \frac{\eta_{расс}}{\beta} \geqslant \frac{\eta_{эф}}{k} \geqslant \frac{\eta_{соб}}{\alpha} = \eta_0,$$

$$\text{когда} \quad s < 0, \quad \frac{I_{отр}}{R} \leqslant I_{эф} \leqslant \frac{I_{соб}}{A} = I_{ос} \quad \text{и} \quad |s| \leqslant I_{соб},$$

$$\sigma < 0, \quad \frac{\eta_{расс}}{\beta} \leqslant \frac{\eta_{эф}}{k} \leqslant \frac{\eta_{соб}}{\alpha} = \eta_0 \quad \text{и} \quad |\sigma| \leqslant \eta_{соб}.$$

2. Вектор лучистого тока. Результативный лучистый поток через единицу площади плоского элемента с направлением нормали $\vec{n}$, произвольно расположенного внутри среды

$$s_n = e_{+n} - e_{-n}, \tag{3}$$

где e_{+n} и e_{-n} — встречные лучистые потоки, падающие на обе стороны единичной площадки (освещенности плоского элемента).

Основываясь на известной теории светового поля [2], можно построить в радиационном поле векторную функцию точки

$$\overrightarrow{s} = \int\limits_{(4\pi)} b \, \overrightarrow{d\omega}, \tag{4}$$

где $\overrightarrow{d\omega}$ по указанной теории есть вектор элементарного телесного угла. $\vec{s}$ назовем вектором лучистого тока (в теории светового поля эта величина называется световым вектором или вектором освещенности).

Проекция вектора лучистого тока (4) на любое направление $\vec{n}$ определяет интенсивность результативного (сальдо) потока через площадку, перпендикулярную взятому направлению, т. е. s_n в (3). Имеем

$$\operatorname{div} \vec{s} = \int\limits_{(4\pi)} \frac{db}{dr} \, d\omega_r,$$

$$\operatorname{div} \vec{s} = -\sigma. \tag{5}$$

На основании теоремы Гаусса

$$\int\limits_{V} \operatorname{div} \vec{s} \, dv = \int\limits_{(F_0)} s_n \, dF$$

и формулы (5)

$$\int\limits_{(V)} \sigma \, dv = -\int\limits_{(F_0)} s_c \, dF, \tag{6}$$

т. е. сальдо всего объема среды равняется взятому с обратным знаком сальдо потоку через поверхность, ограничивающую объем. Это положение непосредственно вытекает также из первого начала без необходимости применения понятия вектора лучистого тока и теоремы Гаусса.

3. Уравнения лучистого обмена, составленные на лучистые сальдо. Воспользовавшись (1а) и (2а), получаем следующую систему уравнений лучистого обмена

$$\frac{s}{A} - \int\limits_{(2\pi)} m \cos\vartheta \, d\omega = \int\limits_{(2\pi)} l \cos\vartheta \, d\omega - I_{\text{oc}}, \tag{7}$$

$$\frac{\sigma}{\alpha} - \int\limits_{(4\pi)} m \, d\omega = \int\limits_{(4\pi)} l \, d\omega - \eta_0, \tag{8}$$

где

$$m = \frac{1}{\pi} \frac{s^*}{A^*} R^* e^{-\bar{k}r} + \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^r \frac{\sigma(r^*)}{\alpha(r^*)} \beta(r^*) \, e^{-\bar{k}|r-r^*|} \, dr^*, \tag{9}$$

$$l = \frac{1}{\pi} I^*_{\text{oc}} e^{-\bar{k}r} + \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^r \eta_0(r^*) \, k(r^*) \, e^{-\bar{k}|r-r^*|} \, dr^*. \tag{10}$$

Величины m и l по структуре аналогичны яркости (b). При известном температурном поле и поле коэффициентов рассеяния и поглощения среды и ограничивающих ее поверхностей система уравнений (7) и (8) определяет поле сальдо интенсивностей на поверхности и по всему объему. Обратно, при известном поле сальдо интенсивностей (по всему объему и на ограничивающих поверхностях) система (7), (8) определяет функции η_0 и I_{oc}, связанные с температурой известным уравнением Планка. Эта же система позволяет решать более общие задачи: в одной части камеры задано температурное поле, в другой — сальдо интенсивность; требуется определить сальдо и температурное поле в тех областях, где они не заданы.

Уравнения (7), (8) есть интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода. Существование и однозначность их решения следуют из того факта, что соответствующая однородная система [когда правые части (7), (8) равны нулю] имеет единственное тривиальное решение

$$s = 0 \quad \text{и} \quad \sigma = 0.$$

Это следует из свойств ядра.

Однозначность решения вытекает также из физических соображений. Термодинамическое равновесие, при котором имеет место

$$\eta_0 = 4I_{\text{ос}} = \text{const},$$

отвечает как раз случаю, когда правые части (7) и (8) обращаются в нули соответственно по всему объему и поверхности. На основании второго начала при этом должно быть

$$s = 0 \quad \text{и} \quad \sigma = 0$$

также во всем пространстве. Справедливо и обратное заключение.

Переход в уравнениях (7), (8) от интегралов по телесному углу к поверхностным и объемным интегралам производится на основании формул (5) и (5а) предыдущей статьи.

Полученная система уравнений определяет постановку и решение очень широкого круга задач, почти совершенно не изученных.

При рассмотрении отдельных частных задач уравнения (7), (8) обычно сильно упрощаются. Так, в топочных и печных устройствах рассеянием среды можно пренебрегать ($\beta = 0$). В уравнении (8) член, содержащий σ под знаком интеграла, обращается в этом случае в нуль. При заданном температурном поле получаем при этом лишь одно интегральное уравнение (7) относительно s. Если, кроме того, возможно пренебречь и отражением от граничных стенок ($R = 0$), то при известном температурном поле получаем непосредственно

$$s = \int\limits_{(2\pi)} l \cos\vartheta \, d\omega - I_{\text{ос}}, \tag{11}$$

$$\sigma = \alpha \int\limits_{(4\pi)} l \, d\omega - \alpha\eta_0. \tag{12}$$

Если лучепоглощающая и рассеивающая среда отсутствуют ($\alpha = \beta = k = 0$), то

$$\sigma = 0$$

и имеем лишь одно интегральное уравнение

$$\frac{s}{A} - \frac{1}{\pi} \int\limits_{(F_0)} \frac{s^*}{A^*} R^* \cos\vartheta \, d\omega = \frac{1}{\pi} \int\limits_{(F_0)} I^*_{\text{ос}} \cos\vartheta \, d\omega - I_{\text{ос}}, \tag{7a}$$

которое позволяет решать задачи трех указанных типов. Рассмотренные выше все уравнения составлены на монохроматические величины. Интегральные значения соответствующих величин по всему спектру длин волн λ определяются по формулам:

$$S = \int\limits_0^{\infty} s \, d\lambda, \tag{13}$$

$$\sum = \int\limits_0^{\infty} \sigma \, d\lambda, \tag{14}$$

$$B = \int^{\infty} b \, d\lambda. \tag{15}$$

Для условий, имеющих место в рабочих пространствах топок и печей, область спектра, в основном определяющая лучистый теплообмен, заключена в интервале длин волн от 0,8 до 30 μ. В большинстве случаев ограничивающие стенки можно рассматривать, как «серые». Пылеугольный факел (с размерами частиц примерно больше 10 μ) можно практически также рассматривать как неселективный. Для неселективной среды расчет лучистого обмена можно вести непосредственно на интегральные величины; вместо $I_{\text{ос}}$ нужно подставить в (7), (8) $E_{\text{ос}} = c_0 \left(\frac{T_{\text{с}}}{100}\right)^4$, а вместо η_0 подставить $4E_0 = 4c_0 \left(\frac{T}{100}\right)^4$. При наличии смешанного (из пыли и газа) факела можно в ряде случаев вести расчет также на интегральные величины. При наличии газовой среды с резко выраженной селективностью расчет лучистого теплообмена нужно производить по отдельным участкам спектра (внутри которых величину α можно принимать постоянной или линейной функцией от длины волны) с дальнейшим суммированием. Вопрос осложнен тем, что величина α в настоящее время не изучена детально по спектру. Для простейших случаев теплообмена расчет можно вести с некоторым приближением на интегральное излучение.

4. Инварианты подобия уравнений лучистого обмена. Обрабатывая уравнения лучистого теплообмена известными методами теории подобия, получаем шесть ограничений в выборе множителей подобного преобразования:

$$\pi_1 = kL = inv, \tag{16}$$

$$\pi_2 = \frac{\beta}{\alpha} = inv, \tag{17}$$

$$\pi_3 = A = \frac{c}{c_0} = inv, \tag{18}$$

$$\pi_4 = \frac{s_{\text{с}}}{AI_{\text{ос}}} = inv, \tag{19}$$

$$\pi_5 = \frac{\sigma}{\sigma I_0} = inv, \tag{20}$$

$$\pi_6 = \frac{I_0}{I_{\text{ос}}} = inv. \tag{21}$$

Для интегрального излучения, вместо (19), (20) и (21), будут:

$$\pi_7 = \frac{S_{\text{с}}}{c_{\text{с}}\theta_{\text{с}}} = inv, \tag{22}$$

$$\pi_8 = \frac{\Sigma L}{c_0\theta_{\text{с}}} = inv, \tag{23}$$

$$\pi_9 = \frac{\theta}{\theta_{\text{с}}} = inv, \tag{24}$$

где L — длина, $\theta = \left(\frac{T}{100}\right)^4$ и $\theta_{\text{с}} = \left(\frac{T_{\text{с}}}{100}\right)^4$.

В задачах первого типа, когда известны величины α, β и A, температурное поле на поверхности и по объему, а требуется определить сальдо, на основании обратной теоремы подобия ([3])

$$\pi_4 = f_1(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_6), \tag{25}$$

$$\pi_5 = f_2(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_6). \tag{26}$$

В задачах третьего типа, когда известно температурное поле на стенке и лучистое сальдо среды (ищется сальдо на поверхности стенок и температурное поле в среде), то для неселективной среды, и когда рассеянием лучей можно пренебречь, имеем

$$\pi_9 = \Phi(\pi_1, \pi_3, \pi_8), \tag{27}$$

$$\pi_7 = \Psi(\pi_1, \pi_3, \pi_8). \tag{28}$$

В реальных условиях в топочном пространстве поле объемных сальдо и эмиссионных параметров среды зависит от гидродинамики факела, от процессов горения и теплообмена, развивающихся в тесной взаимосвязи друг с другом.

Примеры практического применения выведенных уравнений будут даны в другой статье.

Энергетический институт
им. Г. М. Кржижановского
Академия Наук СССР

Поступило
7 II 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Л. Поляк, Журн. техн. физики, вып. 3 (1935). [2] А. А. Гершун, Световое поле (1936). [3] М. В. Кирпичев и А. А. Гухман, Теория подобия, Тр. Гос. физ.-техн. лабор., вып. 9 (1929); Тр. Ленингр. обл. н.-и. теплотехн. ин-та, вып. 1 (1931).