Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 1

ГИДРАВЛИКА

М. А. ВЕЛИКАНОВ, член-корреспондент Академии Наук СССР

ОСАЖДЕНИЕ НАНОСОВ В ПОДПЕРТОМ БЬЕФЕ РЕКИ

Задача стационарного распределения взвешенных наносов по вертикали для плоского равномерного турбулентного потока была разрешена О'Брайаном (1) на основе известной теории турбулентного перемешивания В. Шмидта. Уравнение О'Брайана гласит:

$$\nu = \nu_0 e^{-\int\limits_0^y \frac{\mathfrak{v}}{\varepsilon} dy}, \tag{1}$$

где ν — мутность потока, y — ордината, отсчитываемая от дна, ε — коэффициент турбулентного перемешивания, $\mathfrak{v}$ — гидравлическая крупность. Для раскрытия интеграла автором (2) была использована формула распределения скоростей по вертикали логарифмического вида, данная сначала для рек Ясмундом (3), а затем для шероховатых труб Никурадзе (4). Напишем ее сначала в том виде, который ей придал Никурадзе:

$$U = \frac{\sqrt{ghi}}{k} \ln\left(1 + \frac{y}{\delta}\right), \tag{2}$$

где δ — абсолютная шероховатость; а затем путем подстановки, на основе известной в гидравлике формулы Шези, приводим ее к виду:

$$U = \frac{\sqrt{g}}{Ck} \frac{q}{h} \ln\left(1 + \frac{y}{\delta}\right), \tag{3}$$

где C — коэффициент в формуле Шези, k — «константа Кармана», q — расход на единицу ширины потока, h — глубина.

Тогда на основе равенства, определяющего коэффициент ε,

$$\varepsilon = \frac{gi\,(h-y)}{\left(\frac{du}{dy}\right)}, \tag{4}$$

можно легко преобразовать уравнение (1) в следующее *:

$$\nu = \nu_0 \left[\frac{1-\eta}{1+\frac{\eta}{a}}\right]^{\beta}, \tag{5}$$

* Все выкладки приведены в работе автора (2).

где

$$\beta=\frac{C}{k\sqrt{g}}\,\frac{vh}{q}, \tag{6}$$

$\alpha=\frac{\delta}{h}$ — относительная шероховатость.

Будем измерять «мутность» объемом взвешенных наносов в рыхлом теле (т. е. включая пустоты) в единице объема воды. Тогда для точки $y=0$, где скорость равна 0 [по уравнению (3)] и наносы лежат на дне, мутность будет, очевидно, равна единице.

Переходим теперь к решению поставленной задачи. Из уравнения (5) явствует, что мутность убывает с глубиной h (входящей множителем в параметр β). Следовательно, в подпертом бьефе реки, когда глубина (считая по течению) возрастает, мутность должна убывать и, очевидно, за счет выпадения части наносов.

В дальнейшем мы ограничиваемся плоской задачей. Общее уравнение баланса твердого вещества на единицу ширины потока напишется в виде

$$p_1-p_2=\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{\partial z}{\partial t}\,dx. \tag{7}$$

Здесь p — «твердый сток», т. е. объемное количество наносов (также считая в рыхлом теле), проходящее в единицу времени через некоторое сечение потока; z — высота дна над некоторой произвольной плоскостью; индексы 1 и 2 относятся к двум последовательно взятым сечениям. Если принять, что дно понижается плавно и медленно (случай медленно неменяющегося движения), то мы можем приведенную зависимость переписать в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}=0. \tag{8}$$

Выражение для величины твердого стока дается самим его определением и имеет вид:

$$p=\int\limits_0^h u\nu\,dy, \tag{9}$$

что после подстановки полученных выше выражений для u и ν и введения безразмерных величин приводится к виду

$$p=\frac{\sqrt{g}}{Ck_*}\,q\int\limits_0^1\ln\left(1+\frac{\eta}{\alpha}\right)\left[\frac{1-\eta}{1+\frac{\eta}{\alpha}}\right]^{\beta}d\eta. \tag{10}$$

С другой стороны, из уравнения (3) мы непосредственно получаем:

$$q=\int\limits_0^h u\,dy=\frac{\sqrt{g}}{Ck}\,q\int\limits_0^1\ln\left(1+\frac{\eta}{\alpha}\right)d\eta. \tag{11}$$

Сопоставляя (10) и (11), получаем

$$p=q\varphi, \tag{12}$$

где φ — функция двух параметров α и β, имеющая вид:

$$\varphi=\frac{\int\limits_0^1\ln\left(1+\frac{\eta}{\alpha}\right)\left[\frac{1-\eta}{1+\frac{\eta}{\alpha}}\right]^{\beta}d\eta}{\int\limits_0^1\ln\left(1+\frac{\eta}{\alpha}\right)d\eta}. \tag{13}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться и производной этой функции по параметру β, и для сокращения введем:

$$\psi = -\frac{d\varphi}{d\beta}.$$

Из уравнения (12) явствует физический смысл функции φ. Это есть отношение твердого стока в жидкому, или среднее содержание наносов в единице расхода воды, иначе говоря, средняя мутность потока. Функция зависит от двух параметров: α — относительная шероховатость русла, которую в условиях каждой конкретной задачи можно считать приблизительно постоянной, по крайней мере в той же степени, как и коэффициент C в формуле Шези; и β, который, согласно равенству (6), включает в себя кроме постоянных C, k, g еще три, в общем случае переменных величины: q, $\mathfrak{v}$, h. Но опять таки для каждой конкретной задачи мы можем принять за постоянные: расход воды q и гидравлическую крупность $\mathfrak{v}$, поскольку мы далее будем вести расчет на однородный состав наносов. Таким образом для каждой конкретной задачи параметр β изменяется лишь с глубиной:

$$\beta = \text{const}\, h.$$

Но с другой стороны, рассматривая равномерные потоки одинаковой глубины и расхода, но с различной крупностью наносов, мы с тем же правом можем написать:

$$\beta = \text{const}\, \mathfrak{v},$$

а следовательно, функция φ определяет среднее содержание наносов данной гидравлической крупности, обусловленное гидравлическими характеристиками потока q и h.

Функция φ нами протабулирована (за недостатком места мы таблицы не даем). При $\beta = 0$ $\varphi = 1$, $\varphi' = -\infty$; при $\beta = \infty$ $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$.

В дальнейшем нам удобнее считать начало координат от плотины, а положительное направление x вверх по течению. Высоту свободной поверхности обозначим через H:

$$H = z + h.$$

Тогда наше уравнение (8) получает вид:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{c\mathfrak{v}\psi}{\sqrt{gk}}\,\frac{\partial h}{\partial x}. \tag{14}$$

В каждый данный момент времени форма подпорной кривой $H(x)$ определяется (для медленно изменяющегося движения) известным из гидравлики уравнением, которое в наших обозначениях и пренебрегая изменением живой силы потока (что в условиях подпора при незначительном уклоне дна вполне допустимо) напишется в виде:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = i\,\frac{h_n^3}{h^3}, \tag{15}$$

где h_n — «нормальная» для данного расхода и уклона дна глубина.

Строго говоря, в процессе заиления (т. е. подъема дна) свободная поверхность также изменяется во времени, хотя и весьма слабо по сравнению с изменением формы самого дна. Если бы мы захотели описать весь этот комбинированный процесс одним уравнением, то должны были бы исключить H из (14) и (15), повысив тем самым порядок производных; мы получили бы тогда

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial t} - \frac{c\mathfrak{v}}{\sqrt{gk}}\,\frac{d\psi}{dh}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 - \frac{c\mathfrak{v}\psi}{\sqrt{gk}}\,\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{3ih_n^3}{h^4}\,\frac{\partial h}{\partial t} = 0. \tag{16}$$

Но это нелинейное 2-го порядка уравнение является слишком сложным и едва ли вообще интегрируется. Поэтому исходя из сказанного о весьма слабом изменении во времени свободной поверхности, по сравнению с изменением глубины, мы считаем более целесообразным и практически вполне приемлемым вести расчет на заиление по интервалам времени, считая свободную поверхность потока внутри каждого интервала приблизительно постоянной. Тогда вся задача сводится к интегрированию уравнения:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{c\mathfrak{v}\psi}{\sqrt{gk}} \frac{\partial h}{\partial t} = 0. \tag{17}$$

Переходим к новым независимым переменным:

$$\xi = x + a\mathfrak{v}\psi t,$$
$$\eta = x - a\mathfrak{v}\psi t,$$

где a — сокращенное обозначение постоянной $\frac{C}{k\sqrt{g}}$.

Пользуясь известными формулами преобразования Лагранжа, после подстановки в (17) получаем:

$$\frac{\partial h}{\partial \eta} = 0.$$

Иными словами, h зависит только от ξ:

$$h = F(x + a\mathfrak{v}\psi t), \tag{18}$$

где F — любая произвольная функция. Но для начального момента расчетного интервала (принимая $t = 0$) мы принимаем уравнение неравномерного движения, когда зависимость $h(x)$ дается в форме

$$\frac{dh}{dx} = i\left(\frac{h_n^3}{h^3} - 1\right). \tag{19}$$

Следовательно, для всего интервала времени мы должны эту же форму зависимости отнести уже не к x, а к $\xi = x + a\mathfrak{v}\psi t$. Получаем искомое решение в виде:

$$\xi_2 - \xi_1 = \frac{1}{i}\int\limits_{h_1}^{h_2} \frac{h^3\,dh}{h^3 - h_n^3} = \Phi_2 - \Phi_1. \tag{20}$$

Правая часть дается известными в гидравлике формулами и таблицами Рюльмана, Бресса, Бахметьева и др. и может быть подсчитана для любой пары значений глубин h_1 и h_2. В левой части мы имеем разность двух значений переменной ξ. Эту разность мы можем представить двояко, в зависимости от двух возможных схем расчета:

а) будем рассматривать мгновенный профиль дна в момент времени t от плотины вверх, тогда

$$\xi_2 - \xi_1 = x + a\mathfrak{v}t\,(\psi - \psi_{x=0}),$$

б) будем рассматривать процесс заиления во времени, от $t = 0$ в сечении x. Тогда

$$\xi_2 - \xi_1 = a\mathfrak{v}\psi t.$$

Соответственные решения задачи, выраженные в форме зависимостей $\underline{x}$ от $\underline{h}$ и $\underline{t}$ от $\underline{h}$, будут иметь вид:

а) $$x = \Phi - \Phi_{x=0} - a\mathfrak{v}t\,(\psi - \psi_{x=0}), \tag{21}$$

б) $$t = \frac{\Phi - \Phi_{t=0}}{a\mathfrak{v}\psi}. \tag{22}$$

Из (20) ясно, что функция Φ обращается в бесконечность при $h = h_n$, а отсюда вытекает, что в любой конечный момент времени нормальная глубина имеет место для $x = \infty$, а при $t = \infty$ эта же нормальная глубина имеет место вдоль всего потока. Оба вывода практически вполне оправдываются: на достаточном удалении от плотины река имеет нормальную глубину, а после достаточно длительного периода времени глубина в водохранилище всюду устанавливается одинаковой (случай «полного заиления»). Мы дали здесь в сжатом виде лишь общую идею предлагаемого нами метода расчета заиления водохранилищ. Более подробное изложение всего метода с экспериментальными данными, с решением более общего случая неоднородного состава наносов, а также с переходом к пространственной задаче (расширяющееся к плотине ложе водохранилища) будет опубликовано несколько позже.

Поступило
7 II 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. P. O'Brien, Transact. of the Amer. Geoph. Union (1933). [2] М. А. Великанов, Метеор. и гидрология, № 9—10 (1938). [3] Jasmund, Die Einwirkung der Flusssohle auf die Geschwindigkeit des Flussen des Wassers (1893). [4] I. Nikuradse, Strömungsgesetze in rauhen Rohren (1933).