

Ю. С. ЧАПЛЫГИН

**ГЛИССИРОВАНИЕ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ БЕСКОНЕЧНОГО
РАЗМАХА ПО ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ**

(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 19 I 1940)

1. Вопросом о глиссировании слабо изогнутого контура бесконечного размаха занимались многие авторы. Случай глиссирования по поверхности невесомой жидкости (как конечной, так и бесконечной глубины) обследован акад. С. А. Чаплыгиным при участии М. Гуревича и А. Янпольского⁽¹⁾; за границей этой задачей занимался Н. Wagner⁽²⁾ и др.

Плоская задача о глиссировании по поверхности тяжелой жидкости изучалась акад. Н. Е. Кочиным⁽³⁾, Л. И. Седовым⁽⁴⁾ и другими авторами.

Настоящая заметка содержит результаты исследования (на основе метода Л. И. Седова) задачи о глиссировании плоской пластины бесконечного размаха при числах Фруда, непрерывно меняющихся от нуля до бесконечности.

2. Пусть плоская пластинка бесконечного размаха скользит по поверхности тяжелой несжимаемой жидкости бесконечной глубины (фиг. 1). Скорость v ее поступательного движения горизонтальна и постоянна. Система координат неподвижно связана с пластиной, ось OX горизонтальна и направлена по скорости движения пластины; ось OY направлена вертикально вверх. CD есть сечение пластины координатной плоскостью. Начало координат O лежит на уровне покоящейся в бесконечности жидкости, посредине между проекциями концов CD на ось OX . Угол хода θ предполагается малым, так что смоченная длина l пластины совпадает с проекцией $2a$ сечения CD на ось OX . Движение жидкости относительно пластины предполагается потенциальным и установившимся. Жидкость на бесконечном расстоянии перед пластиной покоится.

3. Математическое решение задачи проводится, исходя из условия конечности скоростей и ускорений всюду внутри жидкости, за исключением окрестностей точек $z = \pm a$. На задней кромке ($z = -a$) обеспечивается гладкий сток жидкости, а у передней кромки скорость обращается в бесконечность (модель брызговой струи CB). Перед пластиной имеется условие об отсутствии волн, на самой пластине — условие обтекания, наконец, на свободной границе — условие о постоянстве давления. Доказывается методом теории малых волн, что решение задачи сводится к определению функции $f(z) = r + is$ [через нее характери-

ческая функция течения $\omega(z)$ может быть найдена квадратурой]. Эта функция $f(z)$ разворачивается в ряд

$$f(z) = r + is = i \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - \sqrt{z^2 - a^2})^n,$$

где a_n — действительные числа. Для определения коэффициентов a_n служат две бесконечные системы уравнений, одна для a_n с четными индексами, а другая для a_n с нечетными индексами:

$$\left. \begin{aligned} (2k+1)a_{2k+1} + \frac{2\nu}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{1}{4(j+k+1)^2 - 1} - \right. \\ \left. - \frac{1}{4(j-k)^2 - 1} \right] a_{2j+1} + b_{2k+1} = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots), \\ 2ka_{2k} + \frac{2\nu}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{4(j+k)^2 - 1} - \right. \\ \left. - \frac{1}{4(j-k)^2 - 1} \right] a_{2j} + b_{2k} = 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Коэффициенты b_n получаются из граничного условия о постоянстве давления на свободной границе и они определяются также формой сечения пластины. Параметр $\nu = \frac{ga}{v^2} = \frac{1}{2Fr^2}$, где Fr — число Фруда ($Fr = \frac{v}{\sqrt{gl}}$). Для плоской пластины все $b_{2k+1} = 0$, начиная с b_5 ; можно показать, что $b_n < \frac{N}{n^3}$, а $a_n < \frac{N}{n^2}$, т. е. a_n и b_n весьма быстро убывают при росте n .

В приближенном решении откинуты все a_n , начиная с a_5 . Все a_n и b_n суть функции от ν и они зависят линейно также от параметров ξ, η, ζ . Параметры ξ и ζ имеют простое физическое значение: через ξ выражается подъемная сила (именно $A = -\rho\pi a v^2 \xi$), а через ζ — осадка h_2 задней кромки [именно $h_2 = (\zeta - 2\theta)a$]; наконец, η есть значение потенциала течения в точке $(+a; 0)$, т. е. $\eta = \varphi(a, 0)$.

Для определения параметров ξ, η, ζ служат уравнения (в приближенном решении)

$$\xi = \sum_{n=1}^{n=4} n a_n (-1)^n; \quad \eta = -\xi Q_0 + \sum_{n=1}^{n=4} n a_n Q_n; \quad \zeta = \xi P_0 - \sum_{n=1}^{n=4} n a_n P_n. \quad (2)$$

В (2) входят функции $P_n(\nu)$ и $Q_n(\nu)$, определяющиеся из соотношения

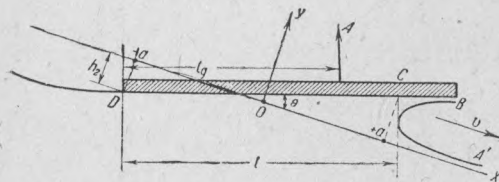
$$P_n + iQ_n = e^{-i\nu} \int_{\infty}^1 \frac{(z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{\sqrt{z^2 - 1}} e^{i\nu z} dz. \quad (3)$$

4. Подъемная сила A пластины, момент M относительно середины смоченной длины (или момент M_D относительно задней кромки), положение центра давления (фиг. 1) относительно задней кромки, т. е. $\frac{l_g}{l}$, брызговое сопротивление $W_{бр}$ и волновое сопротивление $W_{волн}$ определяются через параметры ξ, η, ζ и a_n .

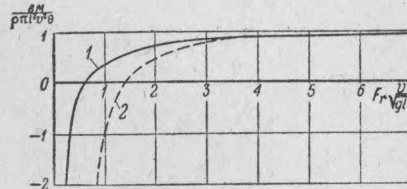
Точно так же можно через a_n определить и подпор h_1 у переднего края пластинки, осадку h_2 задней кромки, смоченную длину $l = 2a$ в функции от числа Fr .

5. Для больших чисел Фруда были получены асимптотические формулы для сил и остальных элементов, определяющих движение, а для малых и промежуточных чисел Фруда решение проводилось численными методами. После соответствующих подсчетов a_n из (1) и (2) были найдены основные величины, определяющие движение пластины. Фиг. 2—8 иллюстрируют полученные результаты.

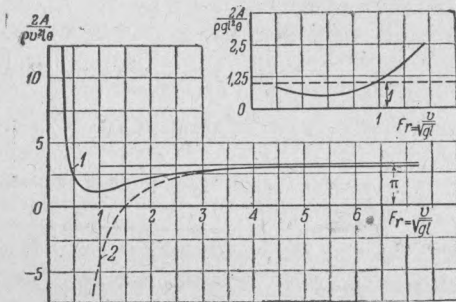
При $Fr \rightarrow \infty$ (см. фиг. 2 и 3) приближенное решение совпадает с хорошо известным решением (4) для больших значений числа Фруда, начиная с $Fr = 2,8$. При $Fr \rightarrow 0$ решение совпадает с гидростатическим (см. фиг. 2а).



Фиг. 1.

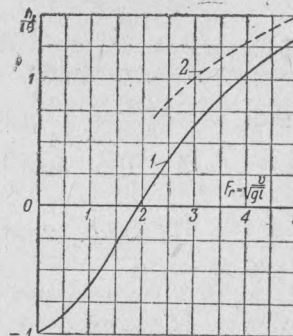


Фиг. 3.



Фиг. 2а.

Фиг. 2б.



Фиг. 4.

Фиг. 2а. Изменение коэффициента подъемной силы в зависимости от числа Фруда
Кривая 1 — численное решение задачи (фиг. 2—7).

Кривая 2 — формула $\frac{2A}{\rho v^2 \theta} = \pi \left(1 - \pi \nu - \frac{4\nu}{\pi} \right)$.

Фиг. 2б. Зависимость коэффициента подъемной силы от числа Фруда (при малых числах Фруда).

Кривая — гидростатическое значение коэффициента.

Фиг. 3. Изменение коэффициента момента (относительно середины смоченной длины) в зависимости от числа Фруда.

Кривая 2 — формула $\frac{8M}{\rho \pi l^2 v^2 \theta} = 1 - \left[\pi + \frac{2,6668}{\pi} \right] \nu$.

Фиг. 4. Изменение коэффициента осадки задней кромки в зависимости от числа Фруда.

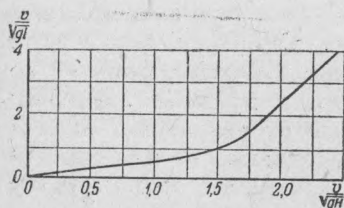
Кривая 2 — формула $\frac{h_2}{\theta} = -\frac{1}{2} \left(1 + \ln \frac{\gamma \Gamma}{2} \right)$, где $\gamma = 1,781$.

Установлена граница существенного влияния весомости жидкости на гидродинамические силы при глиссировании.

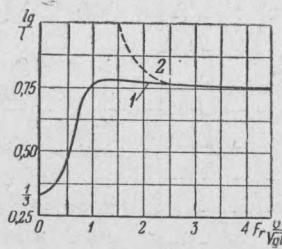
С точки зрения гидродинамических сил в плоской задаче весомость следует учитывать лишь до $Fr = 4,25$, так как на числах Фруда, больших 4,25, гидродинамические силы, действующие на пластинку, вычисленные по теории весомой жидкости и по теории невесомой жидкости, практически совпадают.

Получен график для перемещения центра давления относительно задней кромки в зависимости от числа Фруда (см. фиг. 6). Показано, что этот график является общим для всех нагрузок на воду A и всех углов хода θ (конечно, достаточно малых). Центр давления приближается к своему предельному (при $Fr \rightarrow \infty$) относительно задней кромки положению ($0,75$ смоченной длины) сверху, т. е. на $Fr < \infty$ ($Fr \approx 1,2$) имеется максимум кривой $l_g : l$, лежащий выше $0,75$.

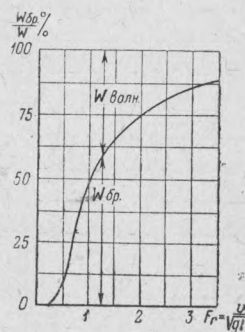
Найден закон распределения полного сопротивления на брызговое и волновое в зависимости от числа Фруда, при котором происходит глиссирование (см. фиг. 7). Отношение брызгового сопротивления к полному от угла хода (при малых углах хода) не зависит и является функцией одного лишь числа Фруда. Волновое сопротивление при глиссировании на больших числах Fr составляет ничтожную часть от полного.



Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

Фиг. 5. График для перехода от чисел Фруда по смоченной длине $\left(Fr = \frac{v}{\sqrt{gl}} \right)$

к числам Фруда F_A по нагрузке $\left(F_A = \frac{v}{\sqrt{gH}} \right)$,

где $H = \sqrt{\frac{A}{\rho g \pi \theta}}$. Если $Fr \geq 7$, то имеет место формула:

$$F_A = \sqrt[4]{2Fr^2 + 4,42 + \frac{9,76}{Fr^2}}$$

Фиг. 6. Перемещение центра давления относительно задней кромки пластины в зависимости от числа Фруда.

Кривая 2 — формула $\frac{l_g}{l} = \frac{\frac{3}{4} - \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{8}{3\pi} \right) \nu}{1 - \left(\pi + \frac{4}{\pi} \right) \nu}$.

Фиг. 7. Распределение полного сопротивления на брызговое и волновое, как функция от числа Фруда.

Даны 4 графика (фиг. 2, 3, 4 и 5), с помощью которых можно получить все данные о глиссировании пластины при любых заданиях параметров, определяющих ее движение.

6. В качестве примеров применения приближенного решения к различным задачам о глиссировании плоской пластины рассмотрены следующие:

- 1) глиссирование при постоянной нагрузке на воду $A = \text{const}$ и при постоянном угле хода $\theta = \text{const}$;
- 2) при постоянной нагрузке на воду и постоянном моменте M_D относительно задней кромки;
- 3) при постоянной нагрузке на воду и постоянной смоченной длине;

4) при постоянном отношении подъемной силы к произведению квадрата скорости на угол хода ($C_B: \theta = \text{const}$).

Доказано, что в первых трех задачах, как подпор h_1 у переднего края смоченной длины пластинки, так и осадка h_2 задней кромки при $v \rightarrow \infty$ стремятся к нулю, в отличие от случая 4-го и случая глиссирования при $l = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, когда при $v \rightarrow \infty$ пластинка поднимается все выше и выше, до бесконечности.

В первых трех случаях h_1 и h_2 стремятся к нулю, как $\left(\frac{\ln v}{v^2}\right)_{v \rightarrow \infty}$ (см. фиг. 8). При этом показано, что как h_1 , так и h_2 стремятся к нулю сверху.

Во всех случаях, начиная с $Fr = 1,9$ (см. фиг. 4), задняя кромка пластинки поднимается выше уровня покоящейся на бесконечности жидкости и остается при больших значениях числа Фруда всегда выше этого уровня.

Установлено, что смоченная длина пластинки в 1-м случае зависит лишь от отношения нагрузки на воду к углу хода и от числа Фруда; при $v \rightarrow \infty$ она стремится к нулю (см. фиг. 8); во 2-м случае от отношения $M_D: A$ и от числа Фруда; при $v \rightarrow \infty$ смоченная длина стремится к конечному пределу, отличному от нуля.

В случае 4-м смоченная длина зависит лишь от отношения $A: v^2 \theta$ и числа Фруда; при $v \rightarrow \infty$ она стремится к конечному пределу, отличному от нуля.

В случае 2-м получен горб на кривой сопротивления. Наконец, показано, что в случаях 2-м и 3-м угол хода $\theta \rightarrow 0$ при $v \rightarrow \infty$, как $\left(\frac{1}{v^2}\right)_{v \rightarrow \infty}$.

7. Необходимо иметь в виду, что расчеты производились для плоской задачи, а поэтому их результаты сравнивать с опытом можно лишь качественно. Если сравнить теоретические кривые фиг. 2, 4 с соответствующими им фиг. 3, 8 работы Л. А. Эпштейна⁽⁵⁾, полученными экспериментально, то легко убедиться в их качественном совпадении.

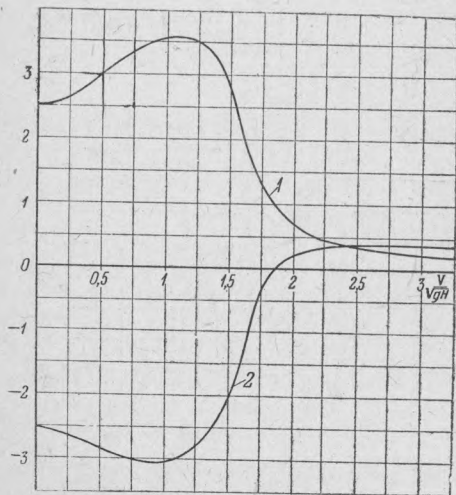
В заключение выражаю благодарность проф. Л. И. Седову за ценные советы.

Центральный аэрогидродинамический институт
им. проф. Н. Е. Жуковского

Поступило
24 I 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. Гуревич и А. Янпольский, Техн. возд. флота, № 10 (1933).
² Н. Wagner, Z. ang. Math. und Mech., Н. 4 (1932). ³ Н. Е. Кочин, Тр. ЦАГИ, вып. 356 (1938). ⁴ Л. И. Седов, Тр. конфер. по теории волнового сопротивления (1937). ⁵ Л. А. Эпштейн, ДАН, XXVI, № 8, 750 (1940).



Фиг. 8. Зависимость коэффициента осадки $\frac{h_2}{H\theta}$ задней кромки пластины и коэффициента смоченной длины $\frac{l}{H}$ от коэффициента скорости $\frac{v}{\sqrt{gH}}$ для пластины, глиссирующей при $A = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$.
Кривая 1 — коэффициент смоченной длины.
Кривая 2 — коэффициент осадки задней кромки.