Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 8

МЕХАНИКА

П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА

О ПРОСТЕЙШИХ СЛУЧАЯХ ФИЛЬТРАЦИИ В ДВУСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 26 I 1940)

В моей статье (1) даны общие формулы для определения элементов движения грунтовой воды в двух слоях одинаковой толщины с двумя различными коэффициентами фильтрации для двух частных случаев движения. Решения этих задач выражаются через гипергеометрические функции $F\left(\frac{1}{2}+\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}, t\right)$ и $F\left(1+\varepsilon, 1-\varepsilon, \frac{3}{2}, t\right)$.

Гауссом найдены следующие выражения:

$$F\left(\frac{1}{2}+\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}, \sin^2 x\right)=\frac{\cos 2\varepsilon x}{\cos x},$$

$$F\left(1+\varepsilon, 1-\varepsilon, \frac{3}{2}, \sin^2 x\right)=\frac{\sin 2\varepsilon x}{2\varepsilon \sin x \cos x}.$$

Нетрудно видеть, что

$$F\left(\frac{1}{2}+\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}, t\right)=\frac{(\sqrt{1-t}+\sqrt{-t})^{2\varepsilon}+(\sqrt{1-t}-\sqrt{-t})^{2\varepsilon}}{2\sqrt{1-t}},$$

$$F\left(1+\varepsilon, 1-\varepsilon, \frac{3}{2}, t\right)=\frac{(\sqrt{1-t}+\sqrt{-t})^{2\varepsilon}-(\sqrt{1-t}-\sqrt{-t})^{2\varepsilon}}{4\varepsilon i\sqrt{t(1-t)}}.$$

Пользуясь этими соотношениями, можно привести формулы для скоростей и расходов к сравнительно простому виду. Здесь мы даем окончательные формулы и результаты некоторых вычислений.

1-я задача. Имеем два горизонтальных слоя грунта глубины h с коэффициентами фильтрации соответственно $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Забит вертикальный шпунт длиною d. Глубины воды в верхнем и нижнем бьефах равны соответственно H и H' (фиг. 1).

Обозначим проекции скорости на оси ox, oy через u_1, v_1 в верхнем слое, через u_2, v_2 в нижнем слое.

Возможны три случая:

1. $d < h$. Комплексные скорости имеют следующий вид:

$$u_1 - iv_1 = -\frac{\varkappa_1 (H - H') \pi i}{4h (I_1 + I_2)} \times$$

$$\times \frac{\left(\sin\frac{\pi z}{2hi} + \sqrt{\sin^2\frac{\pi z}{2hi} - k'^2}\right)^{2\varepsilon} + \left(\sin\frac{\pi z}{2hi} - \sqrt{\sin^2\frac{\pi z}{2hi} - k'^2}\right)^{2\varepsilon}}{\sqrt{\sin^2\frac{\pi z}{2hi} - k'^2}},$$

$$u_2 - iv_2 = \frac{\varkappa_1 (H - H') \pi \operatorname{tg} \pi\varepsilon}{4h (I_1 + I_2)} \times$$

$$\times \frac{\left(-\sin\frac{\pi z}{2hi} + \sqrt{\sin^2\frac{\pi z}{2hi} - k'^2}\right)^{2\varepsilon} - \left(-\sin\frac{\pi z}{2hi} - \sqrt{\sin^2\frac{\pi z}{2hi} - k'^2}\right)^{2\varepsilon}}{\sqrt{\sin^2\frac{\pi z}{2hi} - k'^2}}.$$

Здесь $z = x + iy$, $k = \sin\frac{\pi d}{2h}$, $k' = \cos\frac{\pi d}{2h}$, $\operatorname{tg} \pi\varepsilon = \sqrt{\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}}$,

$$I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} + k \cos \alpha)^{2\varepsilon}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} d\alpha, \quad I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} - k \cos \alpha)^{2\varepsilon}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} d\alpha$$

или

$$I_1 = \int\limits_0^K (dnu + kcnu)^{2\varepsilon} du, \quad I_2 = \int\limits_0^K (dnu - kcnu)^{2\varepsilon} du.$$

Для полного расхода Q и выходной скорости v [т. е. скорости в точке A (фиг. 1)] имеем такие формулы:

$$Q = \varkappa_1 (H - H') Q', \quad v = \frac{\varkappa_1 (H - H')}{2h} v',$$

$$Q' = \frac{1}{I_1 + I_2} \left[\frac{k'^{2\varepsilon}}{\cos \pi\varepsilon} I_3 + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \pi\varepsilon (I_1 - I_2) \right],$$

$$v' = \frac{(1 + k)^{2\varepsilon} + (1 - k)^{2\varepsilon}}{I_1 + I_2},$$

$$I_3 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\varepsilon\alpha \, d\alpha}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \alpha}} = \int\limits_0^{K'} \cos (2\varepsilon \, amu) \, du.$$

Отметим частные случаи. При $\varepsilon = 0$, т. е. $\varkappa_2 = 0$, имеем однослойный грунт глубины h. При этом

$$Q = \varkappa_1 (H - H') \frac{K'}{2K}, \quad v = \frac{\varkappa_1 (H - H') \pi}{4hkK}$$

(K — полный эллиптический интеграл первого рода). При $\varepsilon = \frac{1}{4}$ $\varkappa_2 = \varkappa_1$, т. е. получаем однослойный грунт глубины $2h$. При $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\varkappa_2 = \infty$, т. е. в нижнем слое сопротивление отсутствует. Здесь получаем

$$Q = \infty, \quad v = \frac{\varkappa_1 (H - H')}{2hk}.$$

2. $d > h$. Имеют место следующие формулы:

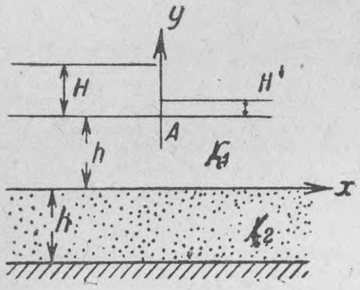
$$u_1 - iv_1 = -\frac{\varkappa_1 (H - H')\pi i}{4hI_0} \times$$

$$\times \frac{\left(\sin\frac{\pi z}{2hi} + \sqrt{\sin^2\frac{\pi z}{2hi} - k'^2}\right)^{2\varepsilon} - \left(\sin\frac{\pi z}{2hi} - \sqrt{\sin^2\frac{\pi z}{2hi} - k'^2}\right)^{2\varepsilon}}{\sqrt{\sin^2\frac{\pi z}{2hi} - k'^2}},$$

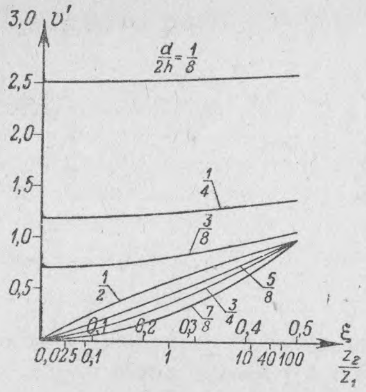
$$u_2 - iv_2 = \frac{\varkappa_1 (H - H')\pi \operatorname{tg}\pi\varepsilon}{4hI_0} \times$$

$$\times \frac{\left(-\sin\frac{\pi z}{2hi} + \sqrt{\sin^2\frac{\pi z}{2hi} - k'^2}\right)^{2\varepsilon} + \left(-\sin\frac{\pi z}{2hi} - \sqrt{\sin^2\frac{\pi z}{2hi} - k'^2}\right)^{2\varepsilon}}{\sqrt{\sin^2\frac{\pi z}{2hi} - k'^2}}.$$

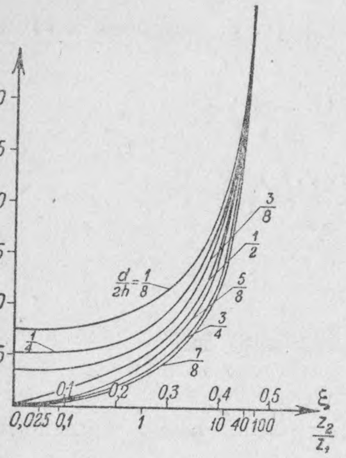
Здесь $I_0 = I_1 - I_2 + \frac{2k'^{2\varepsilon}}{\sin\pi\varepsilon} I_3$, $k = \sin\frac{\pi d}{2h}$, $k' = \left|\cos\frac{\pi d}{2h}\right|$, $\operatorname{tg}\pi\varepsilon = \sqrt{\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}}$.



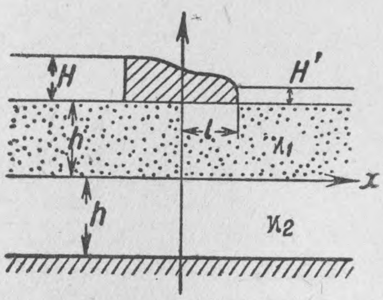
Фиг. 1.



Фиг. 3.



Фиг. 2.



Фиг. 4.

Для расхода Q и выходной скорости v имеем:

$$Q = \frac{1}{2}\varkappa_1 (H - H')\operatorname{tg}\pi\varepsilon \frac{I_1 + I_2}{I_0}, \qquad v = \frac{\varkappa_1 (H - H')\pi}{4hk} \frac{(1+k)^{2\varepsilon} - (1-k)^{2\varepsilon}}{I_0}.$$

Частные случаи: при $\varepsilon = \varkappa_2 = 0$, очевидно, должны иметь $v' = 0$, $Q' = 0$. При $\varepsilon = \frac{1}{4}$, т. е. $\varkappa_2 = \varkappa_1$, получаем однослойный грунт глубины $2h$. При $\varepsilon = \frac{1}{2}$, т. е. $\varkappa_2 = \infty$ (в нижнем слое нет сопротивления) имеем:

$$Q' = \infty, \ v' = 1.$$

3. $d=h$*. Этот случай может быть получен как из 1-го, так и из 2-го случая при $k=1$, $k'=0$, что даст нам:

$$u_1 - iv_1 = -\frac{\varkappa_1 (H-H')\sqrt{\pi i}}{2h\,\Gamma(\varepsilon)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}{\left(\sin\frac{\pi z}{2hi}\right)^{1-2\varepsilon}},$$

$$u_2 - iv_2 = \frac{\varkappa_1 \operatorname{tg}\pi\varepsilon (H-H')\sqrt{\pi}}{2h\,\Gamma(\varepsilon)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}{\left(\sin\frac{\pi z}{2hi}\right)^{1-2\varepsilon}},$$

$$Q = \frac{\varkappa_1}{2}(H-H')\operatorname{tg}\pi\varepsilon, \quad v = \frac{\varkappa_1 (H-H')\sqrt{\pi}}{2h} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}{\Gamma(\varepsilon)}$$

(Γ — функция гамма Эйлера), т. е.

$$Q' = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\pi\varepsilon, \quad v' = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}{\Gamma(\varepsilon)}.$$

На фиг. 2 и 3 построены графики зависимости Q' и v' от $\varepsilon = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}}$ при $\frac{d}{2h} = {}^1/_8,\ {}^1/_4,\ {}^3/_8,\ {}^1/_2,\ {}^5/_8,\ {}^3/_4,\ {}^7/_8$.

2-я задача. Грунтовая вода движется в двуслойной среде под флютбетом (отрезок на фиг. 4) длиною $2l$. Остальные обозначения те же, что в первой задаче. Здесь скорости выражаются как функции z следующим образом:

$$u_1 - iv_1 = \frac{\varkappa_1 (H-H')\pi}{4Ih} \times$$

$$\times \frac{\left(\sin\frac{\pi z}{2hi} + i\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{\pi l}{2h} - \sin^2\frac{\pi z}{2hi}}\right)^{2\varepsilon} + \left(\sin\frac{\pi z}{2hi} - i\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{\pi l}{2h} - \sin^2\frac{\pi z}{2hi}}\right)^{2\varepsilon}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{\pi l}{2h} - \sin^2\frac{\pi z}{2hi}}},$$

$$u_2 - iv_2 = \frac{\varkappa_1 (H-H')\pi \operatorname{tg}\pi\varepsilon}{4Ihi} \times$$

$$\times \frac{\left(-\sin\frac{\pi z}{2hi} + i\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{\pi l}{2h} - \sin^2\frac{\pi z}{2hi}}\right)^{2\varepsilon} - \left(-\sin\frac{\pi z}{2hi} - i\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{\pi l}{2h} - \sin^2\frac{\pi z}{2hi}}\right)^{2\varepsilon}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{\pi l}{2h} - \sin^2\frac{\pi z}{2hi}}},$$

где
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos[2\varepsilon \arcsin(k\sin\alpha)]\,d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}, \quad k = \operatorname{th}\frac{\pi l}{2h}.$$

Расход Q вычисляется по следующей формуле:

$$Q = \frac{\varkappa_1 (H-H')}{2I\cos\pi\varepsilon} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos[2\varepsilon \arcsin(k'\sin\alpha)]\,d\alpha}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\alpha}}, \quad k' = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi l}{2h}}.$$

Институт механики
Академии Наук СССР

Поступило
27 I 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Я. Полубаринова-Кочина, Известия ОТН АН СССР, № 6 (1939).

* Этот случай рассмотрен в диссертации Н. К. Гиринского.