Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 8

МАТЕМАТИКА

К. К. МАРДЖАНИШВИЛИ и Б. И. СЕГАЛ

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ СУММ ВЕЙЛЯ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 25 I 1940)

Пусть

$$S=\sum_{x=Q+1}^{Q+P} e^{2\pi i f(x)}, \qquad f(x)=\alpha x^n+\alpha_1 x^{n-1}+\ \ldots\ +\alpha_n,$$

где n — целое >1, $\alpha,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$ — вещественные числа, Q — целое, P — целое $\geqslant 3$. J. G. van der Corput [1] нашел следующую оценку для модуля суммы S: *если*

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\lambda}{q^2},\quad q>0,\quad (a,q)=1,\quad |\lambda|\leqslant\Lambda,\quad \Lambda\geqslant 1, \tag{1}$$

то

$$|S|^{2^{n-1}}<cP^{2^{n-1}}p^{\sigma}\left(\left(\Lambda+\frac{q}{P}\right)\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{P^{n-1}}\right)\right)^{1-\varepsilon}, \tag{2}$$

где

$$p=\log P,\quad \sigma=\frac{(n-1)^l-1}{l},\quad 0<\varepsilon\leqslant\frac{1}{2},$$

l означает наименьшее целое $\geqslant \varepsilon^{-1}$, а c зависит только от ε и n. Эта оценка является одной из наиболее точных и широко применимых оценок, достигнутых методом Вейля. Особенно следует отметить, что оценка (2) остается нетривиальной для значений q порядка выше, чем $P^{n-\varepsilon}$, где ε — сколь угодно малое фиксированное положительное число. Что же касается значений q порядка ниже, чем P^{ε}, то нетривиальная оценка суммы S для таких значений q легко достигается ранее известными результатами [ср., например, в [2] теорему 354]. Ввиду исключительно важного значения сумм Вейля в аналитической теории чисел нам представляется полезным, как это часто делают, получить оценку, аналогичную (2), с явным выражением для всех параметров, связанных с суммой S. Мы доказываем следующее предложение:

При условиях (1) *имеем*

$$|S|^{2^{n-1}}<11(l-1)(4P)^{2^{n-1}}\mu^{\sigma}\left(\left(\Lambda+\frac{q}{P}\right)\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{P^{n-1}}\right)\right)^{1-\varepsilon}, \tag{3}$$

где

$$\mu=\log P^{n-1}+(n-1)^l-1,\quad \sigma=\frac{(n-1)^l-1}{l},\quad 0<\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}, \tag{4}$$

а l означает наименьшее целое $\geqslant \varepsilon^{-1}$.

Примечание. Как видно из соотношения (11), наш результат может быть улучшен. Так, например, для $n \geqslant 3$ множитель $11(l-1)$ в правой части неравенства (3) может быть заменен числом 8.

При доказательстве этого предложения мы пользуемся следующим неравенством К. К. Марджанишвили, полученным им в работе [3]:

Пусть $\tau_k(h)$ означает число решений $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ уравнения

$$x_1 x_2 \ldots x_k = h$$

в целых положительных числах; тогда при любых целых $l \geqslant 1$, $X \geqslant 1$, $k \geqslant 1$ выполняется неравенство

$$\sum_{1 \leqslant h \leqslant X} \tau_k^l(h) < A_k^{(l)} X (\log X + k^l - 1)^{k^l - 1}, \tag{5}$$

где

$$A_k^{(l)} = k^l (k!)^{-\frac{k^l-1}{k-1}}. \tag{6}$$

Приступая к доказательству неравенства (3), заметим, что [см., например, теорему 265 в [2]]

$$|S|^{2^{n-1}} < 4^{2^{n-1}} \left(P^{2^{n-1}-1} + P^{2^{n-1}-n} \sum_{h_1, \ldots, h_{n-1}=1}^{P} \min\left(P, \frac{1}{(\alpha n!\, h_1 \ldots h_{n-1})}\right)\right),$$

где (ξ) означает расстояние от вещественного числа ξ до ближайшего целого. Отсюда находим

$$|S|^{2^{n-1}} < 4^{2^{n-1}} \left(P^{2^{n-1}-1} + P^{2^{n-1}-n} \sum_{h=1}^{P^{n-1}} \tau_{n-1}(h) \min\left(P, \frac{1}{(\alpha n!\, h)}\right)\right).$$

Применяя здесь обобщенное неравенство Коши, мы получаем для любого целого $l \geqslant 2$

$$|S|^{2^{n-1}} < 4^{2^{n-1}} \left(P^{2^{n-1}-1} + P^{2^{n-1}-n} U^{\frac{1}{l}} V^{\frac{l-1}{l}}\right), \tag{7}$$

где по (5)

$$U = \sum_{h=1}^{P^{n-1}} \tau_{n-1}^l(h) < A_{n-1}^{(l)} P^{n-1} \mu^{\sigma l}, \tag{8}$$

причем μ и σ имеют значения (4), а

$$V = \sum_{h=1}^{P^{n-1}} \min^{\frac{l}{l-1}} \left(P, \frac{1}{(\alpha n!\, h)}\right).$$

Пусть

$$(n!, q) = d, \quad q = q_1 d, \quad n! = md. \tag{9}$$

Сумму V можно разбить на не более чем

$$d\left([P^{n-1} q^{-1}] + 1\right)$$

сумм вида

$$\Omega = \sum_{h=R+1}^{R+q_1} \min^{\frac{l}{l-1}} \left(P, \frac{1}{(\alpha n!\, h)}\right) = \sum_{s=1}^{q_1} \min^{\frac{l}{l-1}} \left(P, \frac{1}{(\gamma + \alpha n!\, s)}\right).$$

Полагая

$$\gamma = \frac{r}{q_1} + \frac{\theta}{q_1}, \qquad |\theta| < 1,$$

причем знак θ можно предполагать противоположным знаку λ, мы получаем при помощи (1) и (9)

$$(\gamma + \alpha n!\, s) = \left(\frac{r}{q_1} + \frac{\theta}{q_1} + \frac{ams}{q_1} + \frac{\lambda ms}{qq_1}\right) =$$
$$= \left(\frac{ams + r}{q_1} + \frac{\frac{\lambda ms}{q} + \theta}{q_1}\right) = \left(\frac{\nu(s) + \Lambda m\theta_s}{q_1}\right),$$

где $\nu(s)$ означает наименьший положительный вычет $ams + r$ по модулю q_1, а θ_s по абсолютному значению не превосходит единицы. Так как по (1) и (9) имеем $(am, q_1) = 1$, то $\nu(s)$ в каждой сумме Ω принимает значения $0, 1, \ldots, q_1 - 1$ по одному разу (в последней сумме некоторые из этих значений могут быть пропущены).

Предположим сперва, что $q_1 > 4\Lambda m + 1$. Так как

$$\nu(s) - \Lambda m \leqslant \nu(s) + \Lambda m\theta_s \leqslant \nu(s) + \Lambda m,$$

то для значений $\nu(s)$, удовлетворяющих условию

$$2\Lambda m \leqslant \nu(s) \leqslant q_1 - 2\Lambda m, \tag{10}$$

имеем

$$(\gamma + \alpha n!\, s) = \left(\frac{\nu(s) + \Lambda m\theta_s}{q_1}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \min\left(\frac{\nu(s) - \Lambda m}{q_1}, \frac{q_1 - \Lambda m - \nu(s)}{q_1}\right) \geqslant \min\left(\frac{\nu(s)}{2q_1}, \frac{q_1 - \nu(s)}{2q_1}\right).$$

Заметив, что число слагаемых суммы Ω со значениями $\nu(s)$, не удовлетворяющими условию (10), будет меньше $4\Lambda m + 1$ и, заменяя каждое такое слагаемое через $P^{\frac{l}{l-1}}$, получим

$$\Omega \leqslant (4\Lambda m + 1) P^{\frac{l}{l-1}} + \sum \max{}^{\frac{l}{l-1}}\left(\frac{2q_1}{\nu(s)}, \frac{2q_1}{q_1 - \nu(s)}\right),$$

где сумма в правой части распространяется на все целые значения $\nu(s)$, удовлетворяющие условию (10). Если теперь предположить, что $[P^{-1}q_1] + 2 \leqslant 2\Lambda m$, то находим

$$\Omega < (4\Lambda m + 1) P^{\frac{l}{l-1}} + (2q_1)^{\frac{l}{l-1}} \cdot 2 \sum_{\nu = [P^{-1}q_1]+2}^{\infty} \frac{1}{\nu^{\frac{l}{l-1}}} < (4\Lambda m + 1) P^{\frac{1}{l-1}} +$$
$$+ 4q_1^{\frac{l}{l-1}} \cdot 2 \int_{P^{-1}q_1}^{\infty} \frac{dv}{v^{\frac{l}{l-1}}} \leqslant (4\Lambda m + 1) P^{\frac{l}{l-1}} + 8(l-1)\, q_1 P^{\frac{1}{l-1}}.$$

Если же $[P^{-1}q_1] + 2 > 2\Lambda m$, то аналогично имеем

$$\Omega < (2[P^{-1}q_1] + 3) P^{\frac{l}{l-1}} + (2q_1)^{\frac{l}{l-1}} \cdot 2 \sum_{\nu = [P^{-1}q_1]+2}^{\infty} \frac{1}{\nu^{\frac{l}{l-1}}} <$$
$$< 2P^{\frac{1}{l-1}} q_1 + 3P^{\frac{l}{l-1}} + 8(l-1)\, q_1 P^{\frac{1}{l-1}} = 3P^{\frac{l}{l-1}} + (8(l-1) + 2)\, q_1 P^{\frac{1}{l-1}},$$

Таким образом всегда будем иметь:

$$\Omega < (4\Lambda m + 1) P^{\frac{l}{l-1}} + 10(l-1) q_1 P^{\frac{1}{l-1}}.$$

Последнее неравенство, очевидно, справедливо также и в случае, когда $q_1 \leqslant 4\Lambda m + 1$. Отсюда находим

$$V < d\,([P^{n-1}q^{-1}] + 1)\,((4\Lambda m + 1) P^{\frac{l}{l-1}} + 10(l-1)\, q_1 P^{\frac{1}{l-1}})$$

или

$$V < 5n!\,(l-1)\,(\Lambda P^{\frac{l}{l-1}} + qP^{\frac{1}{l-1}})\left(\frac{P^{n-1}}{q}+1\right).$$

Воспользовавшись последней оценкой и неравенством (8), мы получаем из (7)

$$|S|^{2^{n-1}} < 4^{2^{n-1}}\Big(P^{2^{n-1}-1} + P^{2^{n-1}-n}(A^{(l)}_{n-1}P^{n-1}\mu^{\sigma l})^{\frac{1}{l}} \times$$

$$\times\left(5n!\,(l-1)\,(\Lambda P^{\frac{l}{l-1}} + qP^{\frac{1}{l-1}})\left(\frac{P^{n-1}}{q}+1\right)\right)^{\frac{l-1}{l}}\Big)$$

или

$$|S|^{2^{n-1}} < 4^{2^{n-1}}\Big(P^{2^{n-1}-1} + P^{2^{n-1}}(A^{(l)}_{n-1})^{\frac{1}{l}}\mu^{\sigma}(5n!\,(l-1)\times$$

$$\times(\Lambda + qP^{-1})(q^{-1}+P^{-n+1}))^{\frac{l-1}{l}}\Big), \qquad (11)$$

где $A^{(l)}_{n-1}$ имеет значение (6). Заметив, что выражение

$$(A^{(l)}_{n-1})^{\frac{1}{l}}(5n!\,(l-1))^{\frac{l-1}{l}}$$

всегда меньше $10(l-1)$, мы находим

$$|S|^{2^{n-1}} < 11(l-1)(4P)^{2^{n-1}}\mu^{\sigma}\left(\left(\Lambda+\frac{q}{P}\right)\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{P^{n-1}}\right)\right)^{1-\frac{1}{l}},$$

откуда непосредственно вытекает наше утверждение (3).

В заключение сделаем еще следующее замечание. В приложениях иногда вместо суммы S встречается сумма вида

$$S_1 = \sum_{x=Q+1}^{Q+P} e^{2\pi i m f(x)},$$

где m — целое $\geqslant 1$. Из нашей оценки, полученной для суммы S, непосредственно вытекает оценка суммы S_1. В самом деле, пусть

$$(m,\ q) = d, \quad m = m_1 d, \quad q = q_1 d.$$

Если выполнены условия (1), то

$$m\alpha = \frac{am_1}{q_1} + \frac{\lambda_1 m_1}{q_1^2}, \qquad (am_1,\ q_1) = 1, \qquad |\lambda_1 m_1| \leqslant \Lambda m_1$$

и при помощи (3) находим

$$|S_1|^{2^{n-1}} < 11(l-1)(4P)^{2^{n-1}}\mu^{\sigma}\left(\left(\Lambda m_1+\frac{q_1}{P}\right)\left(\frac{1}{q_1}+\frac{1}{P^{n-1}}\right)\right)^{1-\varepsilon},$$

откуда умножением и делением на d получаем

$$|S_1|^{2^{n-1}} < 11(l-1)(4P)^{2^{n-1}}\mu^{\sigma}\left(\left(\Lambda m+\frac{q}{P}\right)\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{P^{n-1}}\right)\right)^{1-\varepsilon}.$$

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академия Наук СССР
Москва

Поступило
27 I 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. G. van der Corput, Proceedings Koninklijke Nederlandsche Akad. van Wetenschappen, XLII, 461—467 (1939). [2] E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. I, Leipzig (1927). [3] К. К. Марджанишвили, ДАН, XXII, № 7, 391—393 (1939).