Доклады Академии Наук СССР

1940. Том XXVI, № 4

МЕХАНИКА

П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА

К ВОПРОСУ О ФИЛЬТРАЦИИ В ДВУСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 16 XII 1939)

Рассмотрим плоское движение грунтовых вод, подчиняющееся закону Дарси, в двуслойной среде под гидротехническим сооружением, ограниченным снизу прямолинейным отрезком BMC (фиг. 1). Отобразим конформно (I) и (II) области движения соответственно на полуплоскости t и t', как это указано на фиг. 2. Применяя метод Л. Седова и М. Келдыша [1], получим для комплексных скоростей областей (I) и (II) такие выражения:

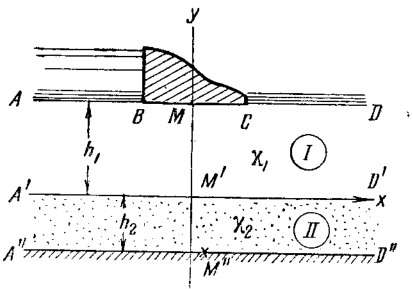
$$\left.\begin{aligned} u_1 - iv_1 &= -\frac{1}{\pi}\sqrt{(1-t^2)(a^2-t^2)}\int_{-1}^{1}\frac{v_0\,d\tau}{(\tau-t)\sqrt{(1-\tau^2)(a^2-\tau^2)}} + b\sqrt{\frac{1-t^2}{a^2-t^2}},\\ u_2 - iv_2 &= -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{v_0\,d\tau'}{\tau'-t'} + c. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

(Здесь $b = u_M$, $c = u_{M'}$; $v_0 = v_1 = v_2$ в точках линии $A'M'D'$). Найдем уравнение, связывающее t' и t:

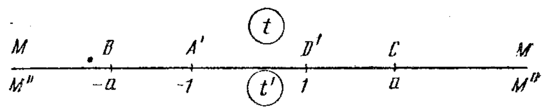
$$t' = \omega(t).$$

Например, если BC—горизонтальный отрезок, то

$$\omega(t) = \frac{(1+t)^\sigma - (1-t)^\sigma}{(1+t)^\sigma + (1-t)^\sigma}, \quad \sigma = \frac{h_1}{h_2}.$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Пусть t и t' стремятся к одной и той же точке отрезка $A'D'$. Тогда по формулам для предельных значений интеграла типа Коши найдем

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{\pi}\sqrt{(1-t^2)(a^2-t^2)}\int_{-1}^{1}\frac{v_0\,d\tau}{(\tau-t)\sqrt{(1-\tau^2)(a^2-\tau^2)}} + b\sqrt{\frac{1-t^2}{a^2-t^2}},\\ u_2 &= -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{v_0\omega'(\tau)\,d\tau}{\omega(\tau)-\omega(t)} + c. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

На горизонтальной границе $A'D'$ двух областей движения имеем, как известно:

$$\frac{u_1}{\varkappa_1}=\frac{u_2}{\varkappa_2},$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$—коэффициенты фильтрации (I) и (II) среды. Это дает следующее интегральное уравнение:

$$\int_{-1}^{1}\frac{v_0 d\tau}{\tau-t}=\frac{1}{\alpha-1}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{\omega'(\tau)}{\omega(\tau)-\omega(t)}-\frac{1}{\tau-t}\right\}v_0 d\tau-$$

$$-\frac{\alpha}{\alpha-1}\int_{-1}^{1}\left\{\sqrt{\frac{(1-t^2)(a^2-t^2)}{(1-\tau^2)(a^2-\tau^2)}}-1\right\}\frac{v_0 d\tau}{\tau-t}+\frac{\pi\varkappa_2}{\varkappa_1}b\sqrt{\frac{1-t^2}{a^2-t^2}}+\pi c. \qquad (3)$$

$$\left(\alpha=\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right).$$

Приемом, примененным в аналогичном случае М. Келдышем и М. Лаврентьевым [2], можно найти решение интегрального уравнения

$$\int_{-1}^{1}\frac{v_0 d\tau}{\tau-t}=\psi(t),$$

удовлетворяющее условиям рассматриваемой задачи, в виде:

$$v_0(t)=-\frac{\sqrt{1-t^2}}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{\psi(s)\,ds}{(s-t)\sqrt{1-s^2}}.$$

Принимая за $\psi(t)$ правую часть уравнения (3), приведем это уравнение к уравнению Фредгольма 2-го рода:

$$v_0(t)=f(t)+\int_{-1}^{1}K(t,\tau)\,v_0(\tau)\,d\tau \qquad (4)$$

с обыкновенным ядром. Здесь

$$f(t)=-\frac{\sqrt{1-t^2}}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{c_2 ds}{(s-t)\sqrt{1-s^2}}-\frac{\sqrt{1-t^2}}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{b_2 ds}{(s-t)\sqrt{(a^2-s^2)}}=$$

$$=\frac{b_2}{\pi^2}\lg\frac{(1+t)\left(a^2-t+\sqrt{(a^2-1)(a^2-t^2)}\right)}{(1-t)\left(a^2+t+\sqrt{(a^2-1)(a^2-t^2)}\right)}$$

$\left(b_2=\frac{\pi\varkappa_2 b}{\varkappa_1(\alpha-1)}\right.$; c и b оказываются связанными равенством $\left.c=\frac{\varkappa_2 b}{\varkappa_1}\right)$;

$$K(t,\tau)=\frac{\alpha\sqrt{1-t^2}}{\pi^2(\alpha-1)}\int_{-1}^{1}\left\{\sqrt{\frac{a^2-s^2}{(1-\tau^2)(a^2-\tau^2)}}-\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\right\}\frac{ds}{(s-t)(\tau-s)}-$$

$$-\frac{\sqrt{1-t^2}}{\pi^2(\alpha-1)}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{\omega'(\tau)}{\omega(\tau)-\omega(s)}-\frac{1}{\tau-s}\right\}\frac{ds}{(s-t)\sqrt{1-s^2}}=$$

$$=\frac{2\alpha\arcsin\frac{1}{a}}{\pi^2(\alpha-1)}\,\frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{(1-\tau^2)(a^2-\tau^2)}}+$$

$$+\frac{\alpha}{\pi^2(\alpha-1)}\,\frac{1}{\tau-t}\left\{\sqrt{\frac{1-t^2}{1-\tau^2}}\lg\frac{(1+\tau)\left(a^2-\tau+\sqrt{(a^2-1)(a^2-\tau^2)}\right)}{(1-\tau)\left(a^2+\tau+\sqrt{(a^2-1)(a^2-\tau^2)}\right)}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\frac{(1-t^2)(a^2-t^2)}{(1-\tau^2)(a^2-\tau^2)}}\lg\frac{(1+t)\left(a^2-t+\sqrt{(a^2-1)(a^2-\tau^2)}\right)}{(1-t)\left(a^2+t+\sqrt{(a^2-1)(a^2-\tau^2)}\right)}\right\}-$$

$$-\frac{\sqrt{1-t^2}}{\pi^2(\alpha-1)}\int_{-1}^{1}\frac{d}{d\tau}\lg\frac{\omega(\tau)-\omega(s)}{\tau-s}\,\frac{ds}{(s-t)\sqrt{1-s^2}}.$$

После того как будет найдено $v_0(t)$ с помощью формул (1), можно найти комплексный потенциал области (I) $f_1(t) = \varphi_1 + i\psi_1$. Зная значения φ_1 на AB и CD, сможем вычислить постоянную b. При отыскании решения интегрального уравнения (4) могут быть использованы известные решения его для некоторых частных случаев задачи: $\varkappa_1 = \varkappa_2$, $h_1 = h_2$, $\varkappa_2 = 0$ и т. п.

Институт механики
Академия Наук СССР

Поступило
20 XII 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Келдыш и Л. Седов, ДАН, XVI, № 1 (1937). [2] М. Лаврентьев и М. Келдыш, Тр. конференции по волновому сопротивлению, ЦАГИ (1937).