Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 4

МАТЕМАТИКА

И. Н. ВЕКУА

О СИНГУЛЯРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ, СОДЕРЖАЩИХ ИНТЕГРАЛЫ В СМЫСЛЕ ГЛАВНОГО ЗНАЧЕНИЯ ПО КОШИ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 23 X 1939)

С. Г. Михлин опубликовал недавно статью [1], в которой даны необходимые и достаточные условия эквивалентности некоторого класса сингулярных интегральных уравнений, содержащих интегралы в смысле главного значения по Коши, с интегральными уравнениями Фредгольма. В настоящей работе мы рассматриваем аналогичную задачу, которую, следуя идее Т. Карлемана [2], сводим при помощи интегралов типа Коши к определенному виду известной задачи Римана в теории функций комплексного переменного. Затем, посредством решения этой задачи Римана, найденного в явном виде Ф. Д. Гаховым [3], мы регулязируем рассматриваемое сингулярное интегральное уравнение и устанавливаем критерии эквивалентности. Эту работу мы нашли возможным опубликовать ввиду того, что способ, использованный в ней, отличен от метода, предложенного С. Г. Михлиным, и кроме того, полученный результат является несколько более общим.

Прежде всего условимся о некоторых обозначениях. Пусть S—простой замкнутый контур, имеющий в каждой точке ограниченную кривизну. Через σ и τ будем обозначать комплексные координаты точек, лежащих на S; пусть начало координат лежит внутри S. Будем говорить, что функция есть класса H_s, если она определена на S и удовлетворяет условию Hölder'а. Кроме того ниже, под функцией, голоморфной вне S, будем подразумевать такую голоморфную функцию, которая обращается в нуль на бесконечности.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\alpha(\sigma)\varphi(\sigma)-\lambda\int\limits_S \frac{K(\sigma,\tau)}{\tau-\sigma}\varphi(\tau)\,d\tau=f(\sigma), \tag{1}$$

где $K(\sigma, \tau)$, $\alpha(\sigma)$, $f(\sigma)$—заданные функции класса H_s относительно обеих переменных σ и τ, λ—постоянный параметр, а интеграл берется в смысле главного значения по Коши.

Если решение уравнения (1) будем искать среди функций класса H_s, то это уравнение можем переписать в виде

$$\alpha(\sigma)\varphi(\sigma)-\lambda\beta(\sigma)\int\limits_S \frac{\varphi(\tau)}{\tau-\sigma}\,d\tau=F(\sigma), \tag{2}$$

где

$$\beta(\sigma) = K(\sigma, \sigma), \quad F(\sigma) = f(\sigma) + \lambda \int_S \frac{K(\sigma, \tau) - K(\sigma, \sigma)}{\tau - \sigma} \varphi(\tau)\, d\tau. \tag{3}$$

Используя известные граничные свойства интеграла типа Коши, уравнение (2) можем записать так:

$$[\alpha(\sigma) - \lambda\pi i\beta(\sigma)]\, \Psi_j(\sigma) - [\alpha(\sigma) + \lambda\pi i\beta(\sigma)]\, \Psi_a(\sigma) = F(\sigma), \tag{4}$$

где $\Psi_j(\sigma)$ и $\Psi_a(\sigma)$ суть предельные значения функции

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau, \tag{5}$$

когда $z \to \sigma$ соответственно изнутри или извне контура S.

Если предполагать, что $\alpha^2(\sigma) + \lambda^2\pi^2\beta^2(\sigma) \neq 0$, то (4) принимает вид

$$\Psi_a(\sigma) = a(\sigma)\, \Psi_j(\sigma) + b(\sigma), \tag{6}$$

где

$$a(\sigma) = \frac{\alpha(\sigma) - \lambda\pi i\beta(\sigma)}{\alpha(\sigma) + \lambda\pi i\beta(\sigma)}, \quad b(\sigma) = -\frac{F(\sigma)}{\alpha(\sigma) + \lambda\pi i\beta(\sigma)}. \tag{7}$$

Итак, если $\varphi(\sigma)$ есть функция класса H_s и удовлетворяет уравнению (1), то интеграл типа Коши (5) дает две такие голоморфные функции внутри и вне контура S, которые удовлетворяют граничным условиям (6). Легко сделать также и обратное заключение: если $\Psi_j(z)$ и $\Psi_a(z)$—функции, голоморфные соответственно внутри и вне контура S и такие, что $\Psi_j(\sigma)$ и $\Psi_a(\sigma)$ суть класса H_s и удовлетворяют граничным условиям (6), то их разность

$$\varphi(\sigma) = \Psi_j(\sigma) - \Psi_a(\sigma) \tag{8}$$

будет решением уравнения (2).

Таким образом мы получили следующую задачу Римана: найти внутри и вне контура S такие голоморфные функции $\Psi_j(z)$ и $\Psi_a(z)$, предельные значения которых на S суть функции класса H_s и удовлетворяют условию (6).

Относительно этой задачи известна следующая фундаментальная теорема ([3]).

Пусть

$$\operatorname{ind}[a(\sigma)] = \frac{1}{2\pi i} \int_S d \lg a(\sigma) = n,$$

где n — целое число или нуль. Если $n = -m \leqslant 0$, то рассматриваемая задача Римана имеет решение для любой функции $b(\sigma)$ и все эти решения выражаются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \Psi_j(z) &= (a_1 + a_2 z + \ldots + a_m z^{m-1})\, e^{g(z)} + z^m e^{g(z)}\, \Phi(z), \\ \Psi_a(z) &= (a_1 + a_2 z + \ldots + a_m z^{m-1})\, z^{-m} e^{g(z)} + e^{g(z)}\, \Phi(z). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Если же $n > 0$, то рассматриваемая задача Римана, вообще говоря, не имеет решения; решение существует и имеет вид

$$\Psi_j(z) = z^{-n} e^{g(z)}\, \Phi(z), \quad \Psi_a(z) = e^{g(z)}\, \Phi(z) \tag{10}$$

лишь в том случае, когда $b(\sigma)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\int_S e^{-g_a(\tau)} \tau^{-l} b(\tau)\, d\tau = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, n, \tag{11}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — произвольные постоянные и

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{\lg[\tau^{-n}a(\tau)]}{\tau-z}\,d\tau, \quad \Phi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{e^{-g_a(\tau)}\,b(\tau)}{\tau-z}\,d\tau. \tag{12}$$

Пусть $n=-m\leqslant 0$. Тогда в силу (3), (7), (8), (9) и (12) легко получим, что всякое решение класса H_s уравнения (1) удовлетворяет также интегральному уравнению Фредгольма

$$\varphi(\sigma)-\lambda\int\limits_S K^*(\sigma,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=f^*(\sigma)+P_{m-1}(\sigma)\,f_0(\sigma), \tag{1*}$$

где

$$K^*(\sigma,\tau)=\frac{\lambda}{2}\left[\frac{1}{\alpha(\sigma)+\lambda\pi i\beta(\sigma)}+\frac{\sigma^{2n}}{\alpha(\sigma)-\lambda\pi i\beta(\sigma)}\right]\frac{K(\sigma,\tau)-K(\sigma,\sigma)}{\tau-\sigma}+$$

$$+\lambda\left(\frac{\sigma^{\frac{3n}{2}}}{\sqrt{a(\sigma)}}-\frac{\sqrt{a(\sigma)}}{\sigma^{\frac{n}{2}}}\right)e^{-\omega(\sigma)}\frac{1}{2\pi i}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_S \frac{\tau_1^{\frac{n}{2}}e^{\omega(\tau_1)}}{\sqrt{\alpha^2(\tau_1)+\lambda^2\pi^2\beta^2(\tau_1)}}\,\frac{K(\tau_1,\tau)-K(\tau_1,\tau_1)}{\tau-\tau_1}\,\frac{d\tau_1}{\tau_1-\sigma}, \tag{13}$$

$$f^*(\sigma)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha(\sigma)+\lambda\pi i\beta(\sigma)}+\frac{\sigma^{2n}}{\alpha(\sigma)-\lambda\pi i\beta(\sigma)}\right]f(\sigma)+$$

$$+\left[\frac{\sigma^{\frac{3n}{2}}}{\sqrt{a(\sigma)}}-\frac{\sqrt{a(\sigma)}}{\sigma^{\frac{n}{2}}}\right]e^{-\omega(\sigma)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{\tau^{\frac{n}{2}}e^{\omega(\tau)}}{\sqrt{\alpha^2(\tau)+\lambda^2\pi^2\beta^2(\tau)}}\cdot\frac{f(\tau)}{\tau-\sigma}\,d\tau, \tag{14}$$

$$P_{m-1}(z)=a_1+a_2z+\ldots+a_mz^{m-1},$$

$$f_0(\sigma)=e^{-\omega(\sigma)}\left[\frac{\sigma^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{a(\sigma)}}-\frac{\sqrt{a(\sigma)}}{\sigma^{\frac{3n}{2}}}\right], \quad \omega(\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{\lg[\tau^{-n}a(\tau)]}{\tau-\sigma}\,d\tau. \tag{15}$$

Нетрудно также доказать, что все решения уравнения (1*) являются функциями класса H_s и удовлетворяют уравнению (1). Таким образом, если $n\leqslant 0$, то уравнения (1) и (1*) эквивалентны между собою.

Пусть теперь $n>0$. Тогда всякое решение класса H_s уравнения (1), если таковое существует, удовлетворяет уравнению Фредгольма (1*) при $P_{m-1}(\sigma)\equiv 0$ и дополнительным условиям вида

$$\int\limits_S \mu_l(\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=\int\limits_S \nu_l(\tau)\,f(\tau)\,d\tau, \quad l=1,2,\ldots,n, \tag{16}$$

которые получаются из (11), причем $\mu_l(\tau)$ и $\nu_l(\tau)$ — известные функции. Можно доказать также и обратное предложение: если при $n>0$ существует решение уравнения (1*) со свободным членом $f^*(\sigma)$, удовлетворяющее дополнительным условиям (16), то это решение будет функцией класса H_s и удовлетворяет уравнению (1).

Таким образом при $n>0$ уравнение (1) эквивалентно одному интегральному уравнению Фредгольма (1*) со свободным членом $f^*(\sigma)$ и n дополнительным условиям (16).

Рассмотрим частный случай, когда $K(\sigma,\tau)=K(\sigma,\sigma)=\beta(\sigma)$. Тогда общее решение уравнения (1) при $n\leqslant 0$ дается формулой

$$\varphi(\sigma)=f^*(\sigma)+P_{m-1}(\sigma)\,f_0(\sigma).$$

Если $n > 0$, то решение будет существовать лишь в том случае, когда $f^*(\sigma)$ удовлетворяет условиям

$$\int\limits_S \mu_l(\tau) f^*(\tau)\, d\tau = \int\limits_S \nu_l(\tau) f(\tau)\, d\tau, \quad l = 1, 2, \ldots, n,$$

причем при выполнении этих условий существует единственное решение уравнения (1): $\varphi(\sigma) = f^*(\sigma)$.

В частности, если $\alpha = 0$, $\beta = -1$, $\lambda = 1$, то, очевидно, $n = 0$ и из (17) в силу (14) получим, что

$$\varphi(\sigma) = -\frac{1}{\pi^2} \int\limits_S \frac{f(\tau)}{\tau - \sigma}\, d\tau.$$

Эта формула дает обращение интеграла

$$\int\limits_S \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \sigma}\, d\tau = f(\sigma).$$

Математический институт
Грузинского филиала Академии Наук СССР
Тбилиси

Поступило
10 XI 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Г. Михлин, ДАН, XXIV, № 4 (1939). [2] T. Carleman, Ark. för Mat., Astr. och Physik, 16 (1922). [3] Ф. Д. Гахов, Матем. сборн., 2 (44), 4 (1937).