Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 4

МАТЕМАТИКА

Л. ЛЮСТЕРНИК

ЗАМКНУТЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ НА МНОГОМЕРНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 28 XII 1939)

Для замкнутых поверхностей рода 0 доказано существование или трех по крайней мере замкнутых геодезических различной длины (притом самонепересекающихся), или континуального семейства таких линий [1]. М. Morse доказал, что на римановом многообразии, гомеоморфном n-мерной сфере, имеется не менее $\frac{n(n+1)}{2}$ аналитически различных замкнутых геодезических; при некоторых метрических ограничениях ни одна из них не сводится к нескольким обходам другой [2]. Однако вопрос о числе геометрически различных оставался открытым.

Мы сейчас докажем, что на римановом многообразии, гомеоморфном n-мерной сфере, имеется по крайней мере $(2n-1)$ замкнутая геодезическая различной длины или континуальное семейство замкнутых геодезических. При условиях Морза они дают $(2n-1)$ геометрически различных замкнутых геодезических.

Пусть S_n есть n-мерная сфера, задаваемая уравнением $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n+1}^2=1$ в $(n+1)$ одномерном координарном пространстве E_{n+1} $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$.

Каждое риманово многообразие, гомеоморфное S_n, можно реализовать в виде сферы S_n с соответственно введенной на ней римановой метрикой. Мы будем поэтому рассматривать замкнутые геодезические на S_n, на которой задана некоторая риманова метрика. Проведем доказательство для случая $n=3$. Докажем, что на S_4 имеется 5 геодезических различной длины или континуум таких геодезических.

Обозначим через A_6 6-мерное семейство всех окружностей (не выродившихся в точку) на S_4. Если каждую окружность рассматривать как точку, то A_6 есть 6-мерное неограниченное многообразие. Надо отличать конечную и бесконечную гомологии в A_6: цикл, ограничивающий конечный комплекс на A_6, называется конечно-гомологичным нулю, в отличие от бесконечно-гомологичного нулю, т. е. цикла, ограничивающего бесконечный комплекс на A_6, но не ограничивающего конечный. A_6 не имеет одномерных циклов, бесконечно-негомологичных нулю, и содержит класс гомологии (A_1') одномерных циклов, конечно-негомологичных нулю (но бесконечно-гомологичных нулю). Именно, пересечем сферу S_3 3-мерной гиперплоскостью; в пересечении получится двумерная сфера S_2; совокупность окружностей на S_2 с общим диаметром будет представителем класса (A_1'). Двойственный класс 5-мерных циклов (бесконечно-негомологичных нулю) обозначим через (A_5). На A_6 имеется класс двумерных циклов (A_2'), конечно-негомологичных нулю, но бесконечно-гомологичных ему, и класс (A_2) бесконечно-негомологичных нулю; двойственные им классы 4-мерных циклов обозначим: (A_4') и (A_4). Представителем класса (A_2') может служить семейство всех больших кругов двумерной сферы S_2; класса (A_2)—совокупность всех окружностей, проходящих через данные две точки; представителя класса (A_4') получим, если образовать однопараметрическое семейство всех сфер (S_2), касающихся данной сферы S_2 в данной точке, и взять совокупность всех окружностей, лежащих на этих сферах. Представителем класса (A_4) может служить совокупность всех больших кругов на S_3.

Представителя класса (A_5) мы получим, образовав двухпараметрическое семейство всех сфер (S_2), касающихся данной окружности в данной точке, и взяв совокупность всех окружностей, лежащих на этих сферах. Далее, имеется класс бесконечно-негомологичных нулю трехмерных циклов (A_3), представителем которого может служить совокупность больших кругов, проходящих через данную точку.

Будем непрерывно деформировать семейство A_6 на S_3 (непрерывная деформация семейства кривых заключается в непрерывной деформации всех его кривых, при которой достаточно близкие точки на достаточно близких кривых остаются во время деформации сколь угодно близкими); ограничимся деформациями, при которых длина дуги кривой на образе A_6 остается непрерывным функционалом и непрерывно зависит от параметра деформации.

Рассмотрим совокупности $\{B_i\}$ и $\{B_i'\}$ всевозможных семейств кривых, в которые переходят семейства классов (A_i) или (A_i') при различных деформациях A_6. Обозначим через c_i (или c_i') нижнюю границу максимумов длин кривых на семействах из $\{B_i\}$ (или $\{B_i'\}$).

Легко показать, что

$$\begin{array}{ccc} & \geqslant c_4 & \\ c_6 \geqslant c_5 & & \geqslant c_3 \geqslant c_2 > 0 \\ & \geqslant c_4' & \\ & & (c_2' = c_1' = 0). \end{array} \tag{1}$$

Для каждого класса $\{B_i\}$ или $\{B_i'\}$ возможны два случая.

1. Существует семейство этого класса, на котором максимум длин кривых в точности равен $c_i\,(c_i')$. Тогда, применяя общие методы вариационного исчисления, можно показать, что такое семейство содержит замкнутую геодезическую длины $c_i\,(c_i')$.

2. Существует последовательность положительных чисел $\varepsilon_n \to 0$, для каждого из которых найдется семейство D_n из $\{B_i\}$ ($\{B_i'\}$) такое, что максимум длин кривых на D_n не превосходит $c_i + \varepsilon_n (c_i' + \varepsilon_n)$. В этом случае существуют на семействах D_n «почти геодезические линии», пределы которых при $n \to \infty$ суть замкнутые геодезические длины $c_i\,(c_i')$.

Из этого следует: если все неравенства (1) суть строгие неравенства, то на S_3 существует не менее 5 замкнутых геодезических разной длины.

Рассмотрим теперь случай, когда одно из неравенств (1) обращается в равенство. Докажем, что тогда имеется континуальное семейство замкнутых геодезических. Рассмотрим в качестве примера случай $c_6 = c_5 = c$. Здесь в свою очередь имеются две возможности.

1. Существует семейство $D_6 \subset \{B_6\}$, на котором максимум длин равен c. Обозначим через F совокупность замкнутых геодезических длины c

из D_6. В силу предыдущего F не пусто. D_6 есть результат деформации ϑ семейства A_6. Обозначим через F_1 совокупность всех окружностей из A_6, которые при ϑ переходят в кривые семейства F_1. Докажем, что F_1 заключает семейство из класса (A_1'). В самом деле, в противном случае по теореме Л. С. Понтрягина можно было бы двойственный цикл из класса (A_5) снять с F_1, т. е. в классе (A_5) имелся бы цикл A_5, не пересекающий F_1. При деформации ϑ A_5 перешло бы в семейство D_5 из D_6. Пересечение $D_5 \times F = 0$, потому что, если бы D_5 имело общий элемент с F, то A_5 имело бы общий элемент с F_1, вопреки определению A_5. Далее, так как $c_5 = c_6 = c$, то максимум длин кривых на D_5 не меньше c; этот максимум не может и превышать c—максимума длин кривых на всем D_6. Итак, максимум длин кривых на D_5 равен $c = c_5$. Но тогда в силу предыдущего D_5 заключает замкнутую геодезическую g длины c. По определению F $g \subset F$, а значит, в $F \times D_5$, что противоречит только что доказанному $F \times D_5 = 0$.

Итак, F_1 содержит семейство A_1' класса (A_1'). Если результат деформации ϑ в применении к A_1' есть D_1', то $D_1' \subset F$.

Семейство A_1' может при деформации перейти или в континуальное семейство кривых, или в точку, или в кривую, выродившуюся в простую дугу (образ отрезка). Так как в данном случае результат D_1' деформации A_1' есть семейство замкнутых геодезических длины $c > 0$, то оба последних случая отпадают. Предложение доказано.

2. Существует последовательность семейств $D_6^n \subset \{B_6\}$, на которых максимумы длин равны $c + \varepsilon_n$, где $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$.

Повторяя предыдущие рассуждения, мы получим для каждого n семейство «почти замкнутых» геодезических, содержащее образы семейств из (A_1'), топологические пределы которых будут континуальные семейства замкнутых геодезических длины c.

Аналогично доказываются остальные случаи.

Поступило
10 XII 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Люстерник и Л. Г. Шнирельман, Топологические методы в вариационных задачах (1930). [2] M. Morse, The Calculus of Variations in the Large (1934).