Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 3

МАТЕМАТИКА

И. М. КАМЕНЕЦКИЙ

ОБ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ И СООТВЕТСТВУЮЩИХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССАХ.

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 9 XII 1939)

Пусть $n_0 \leqslant n_1, \ldots$ — некоторая конечная или бесконечная ступенчатая последовательность ([6]). Совокупность всех неравных попарно членов ее, расположенных в порядке возрастания, образует последовательность, которую условимся называть опорной последовательностью ступенчатой последовательности $n_0, n_1, \ldots$ и будем обозначать $j_0, j_1, \ldots$ $(j_0 < j_1 \ldots)$, Опорная последовательность бесконечной ступенчатой последовательности вполне определяет эту последнюю.

Пусть: 1) $n_0 \leqslant n_1, \ldots$ —некоторая неограниченная (следовательно, бесконечная) ступенчатая последовательность с опорной последовательностью $j_0, j_1, \ldots$; 2) $x_0, x_1, \ldots$—последовательность точек на комплексной плоскости такая, что

$$|x_i - x_j| + |n_i - n_j| \neq 0 \quad (i \neq j;\ i, j = 0, 1, \ldots);$$

3) $j(i)$—ближайшее к i, большее его число последовательности $j_0, j_1, \ldots$ Последовательность полиномов $p_i(x)$ степени $j(i) - 1$ $(i = 0, 1, \ldots)$, удовлетворяющих соотношениям

$$p_i^{(n_i)}(x_i) = 1,$$
$$p_i^{(n_k)}(x_k) = 0 \quad [k = 0, 1, \ldots, j(i) - 1;\ k \neq i],$$

по теореме 1 предыдущей статьи автора существующих и однозначно определяемых этими соотношениями, условимся называть фундаментальной последовательностью полиномов, ассоциированной с интерполяционной проблемой (P_{n_i}) и последовательностью точек $\{x_i\}$. *

Всякий полином $P_m(x)$ степени m $(m = 0, 1, \ldots)$ может быть представлен, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации полиномов $p_i(x)$ $[i = 0, 1, \ldots, j(m) - 1]$:

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^{j(m)-1} P_m^{(n_i)}(x_i)\, p_i(x).$$

Пусть: 1) $n_0 \leqslant n_1, \ldots, \leqslant n_{m-1}$—некоторая ступенчатая последовательность; определим бесконечную последовательность n_i $(i = 0, 1, \ldots)$ посредством соотношений

$$n_{i+m} = n_i + m \quad (i = 0, 1, \ldots);$$

* Термин «фундаментальная последовательность полиномов» заимствован автором у Whittaker'а([5]).

эта последовательность будет также ступенчатой; 2) $x_i\,(i=0,\ 1,\ldots)$— последовательность точек на комплексной плоскости, удовлетворяющая условиям

$$x_{i+m}=x_i\ (i=0,\ 1,\ldots);$$

такую последовательность условимся называть периодической с периодом m (2) *; 3) $p_i(x)\,(i=0,\ 1,\ldots)$—фундаментальная последовательность полиномов, ассоциированная с интерполяционной проблемой (P_{n_i}) и последовательностью точек $\{x_i\}$; 4) l—наименьший из модулей неравных нулю корней уравнения $\Delta(\lambda)=0$, где $\Delta(\lambda)$ есть определитель

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} l^{\lambda x_0} & l^{\omega\lambda x_0} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & l^{\omega^{m-1}\lambda x_0} \\ l^{\lambda x_1} & \omega^{n_1}\ l^{\omega\lambda x_1} & \ldots\ldots\ldots\ \overline{\omega^{m-1}}^{n_1} & l^{\omega^{m-1}\lambda x_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ l^{\lambda x_{m-1}} & \omega^{n_{m-1}}\ l^{\omega\lambda x_{m-1}} & \ldots\ \overline{\omega^{m-1}}^{n_{m-1}} & l^{\omega^{m-1}\lambda x_{m-1}} \end{vmatrix}\quad \left(\omega=l^{\frac{2\pi i}{m}}\right).$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Всякая целая функция $f(x)$ класса $<[1,\ l]$ (1) разлагается в ряд*

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} f^{(n_i)}(x_i)\,p_i(x),$$

сходящийся равномерно во всякой ограниченной области. Константа l является точной.

Эта теорема содержит как частные случаи соответствующие результаты В. Л. Гончарова (2) (при $n_i=i$) и H. Poritsky'го (3) $\left(\text{при } n_i=m\left[\frac{i}{m}\right]\right)$.

Следствие. Если $f(x)$—целая функция класса $<[1, l]$ и все числа $f^{(n_i)}(x_i)\ (i=0,\ 1,\ldots)$ равны нулю, то $f(x)\equiv 0$.

Сохраним предшествующие обозначения; имеет место также следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть $c_0, c_1,\ldots, c_n,\ldots$—такая последовательность комплексных чисел, что ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|c_n|}{l^n}$$

сходится; тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x)$$

представляет целую функцию класса $\leqslant[1,\ l]$.

Ниже мы даем обобщение теоремы 5. Пусть: 1) $n_0, n_1,\ldots$—ступенчатая последовательность, удовлетворяющая условиям теоремы 5; 2) $x_0, x_1,\ldots$—последовательность точек на комплексной плоскости, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{k\to\infty} x_{i+km}=\alpha_i\ (i=0,\ 1,\ldots,\ m-1),$$

где $\alpha_i\,(i=0,\ 1,\ldots,\ m-1)$—фиксированные точки на комплексной плоскости; такие последовательности условимся называть асимптотически

* Как и прежде, мы предполагаем, что $|x_i-x_j|+|n_i-n_j|\neq 0,\ i\neq j$.

периодическими *; 3) $p_i(x)$ $(i=0,\ 1,\ldots)$—фундаментальная последовательность полиномов, ассоциированная с интерполяционной проблемой (P_{n_i}) и последовательностью точек $\{x_i\}$; l—наименьший из модулей не равных нулю корней уравнения $\Delta_1(\lambda)=0$, где через $\Delta_1(\lambda)$ обозначен определитель, получающийся из определителя $\Delta(\lambda)$ теоремы 5 путем замены $x_0, x_1, \ldots x_{m-1}$ соответственно на $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$. Имеет место

Теорема 7. *Всякая целая функция $f(x)$ класса $<[1,\ l]$ разлагается в ряд*

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} f^{(n_i)}(x_i)\, p_i(x),$$

сходящийся равномерно во всякой ограниченной области.

Следствие. Если $f(x)$—целая функция класса $<[1,\ l]$ и все числа $f^{(n_i)}(x_i)$ $(i=0,\ 1,\ldots)$ равны нулю, то $f(x)\equiv 0$.

Теорема 8. [Обобщение теоремы J. Schoenberg'a (4)]. *Пусть $x_0, x_1, \ldots$— последовательность точек на комплексной плоскости такая, что множество, производное по отношению к множеству, элементами которого служат различные точки последовательности $\{x_i\}$, расположено на отрезке $[-1,\ +1]$ вещественной оси. Тогда всякая целая функция $f(x)$ класса $<\left[1,\ \frac{\pi}{4}\right]$ разлагается в обобщенный ряд Абеля, ассоциированный с последовательностью точек $\{x_i\}$*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_n)\, p_n(x),$$

где

$$p_n(x)=\int_{x_0}^{x} dx' \int_{x_1}^{x'} dx'' \ldots \int_{x_{n-1}}^{x^{(n-1)}} dx^{(n)}\ (n=1,\ 2,\ldots),\ \ p_0(x)\equiv 1,$$

причем сходимость равномерна во всякой ограниченной области.

В качестве следствия этой теоремы получаем соответствующую теорему единственности.

Воронежский государственный университет

Поступило
13 X 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Л. Гончаров, Успехи математических наук, III, 113—143. [2] В. Л. Гончаров, Sur un procédé d'itération, Сообщения Харьковского матем. об-ва, 4, 67—85 (1932). [3] H. Poritsky, Trans. Amer. Math. Soc., 34, 274—331 (1932). [4] J. J. Schoenberg, Trans. Amer. Math. Soc., 40, 12—23 (1936). [5] J. M. Whittaker, Interpolatory Function Theory, Cambridge (1935). [6] И. М. Каменецкий, ДАН, XXV, № 5 (1939).

* Мы предполагаем попрежнему, что $|x_i-x_j|+|n_i-n_j|\neq 0$ $(i\neq j;\ i, j=0, 1, \ldots)$; кроме того должно быть $|\alpha_i-\alpha_j|+|n_i-n_j|\neq 0$ при $i\neq j$.