Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 3

МАТЕМАТИКА

Д. МЕНЬШОВ

ОБ ИЗОБРАЖЕНИИ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 XII 1939)

До сих пор не выяснено, сходится ли почти всюду ряд Фурье от любой непрерывной функции. Поэтому естественно поставить вопрос, каковы могут быть непрерывные функции, ряды Фурье которых обладают упомянутым свойством. Можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Какова бы ни была измеримая функция $f(x)$, конечная почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$, и каково бы ни было положительное число σ, всегда можно определить функцию $G(x)$, непрерывную на этом сегменте, и измеримое множество Π, которые обладают свойствами*:

α) $\Pi \subset [-\pi, \pi]$, $\operatorname{mes} \Pi > 2\pi - \sigma$;

β) $G(x) = f(x) \quad (x \subset \Pi)$;

γ) *ряд Фурье от функции $G(x)$ сходится почти всюду на* $[-\pi, \pi]$.

При доказательстве этой теоремы мы пользуемся следующими двумя леммами:

Лемма 1. Пусть даны произвольные натуральные числа q и $\nu > 8$ и какой-нибудь сегмент $[c, d]$. Тогда, полагая

$$\delta = \frac{d-c}{\nu q}, \quad c_s = c + s\nu\delta, \quad a_s = c_s - \delta \quad (1 \leqslant s \leqslant q),$$

будем иметь

$$\left| \sum_{s=1}^{q} \int_{a_s}^{c_s} \frac{\sin n(t-x)}{t-x}\, dt \right| < L$$
$$\left(c + \frac{d-c}{\nu} \leqslant x \leqslant d - \frac{d-c}{\nu}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots\right),$$

где L—абсолютная постоянная.

Лемма 2. Пусть $ax + b$ есть линейная функция, которая не принимает значений разных знаков на некотором сегменте $[c, d]$. Тогда для любого положительного числа ε и для любого натурального числа $\nu > 8$ можно определить функцию $\psi(x)$ и измеримое множество E, которые обладают следующими свойствами:

1°. $\psi(x)$ непрерывна на сегменте $[c, d]$ и геометрически изображается ломаной линией с конечным числом звеньев;

2°. $\psi(c) = ac + b$, $\psi(d) = ad + b$;

3°. $E \subset [c, d]$, $\operatorname{mes} E > (d - c)\left(1 - \frac{8}{\nu}\right)$;

4°. $|\psi(x)| \leqslant 2\nu\varkappa \quad (c \leqslant x \leqslant d)$,

где $\varkappa = \max\limits_{c \leqslant x \leqslant d} |ax + b|$;

5°. $\left|\int\limits_{c'}^{d'} \psi(t)\, dt\right| < \varepsilon \quad (c \leqslant c' < d' \leqslant d)$;

6°. $\left|\int\limits_{c}^{d} \psi(t) \frac{\sin n(t - x)}{t - x}\, dt\right| < B\nu\varkappa, \ (x \subset E, \ n = 1, 2, 3, \ldots)$,

где B—абсолютная постоянная;

7°. $\psi(x) = ax + b \quad (x \subset E)$. *

Приведем эскиз доказательства теоремы 1.

В силу C-свойства измеримых функций достаточно доказать теорему 1 для непрерывных функций $f(x)$**. В таком случае мы можем написать

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(x),$$

где любая из функций $\Phi_m(x)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и линейна на каждом из сегментов $[c_{j-1,\, m}\ c_{jm}]$, $1 \leqslant j \leqslant N_m$, которые получаются подразделением сегмента $[-\pi, \pi]$ (тогда $c_{0m} = -\pi$, $c_{N_m,\, m} = \pi$). Мы можем, кроме того, предположить, что

$$|\Phi_m(x)| < \frac{\sigma}{2^{2m}} \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi, \ m = 2, 3, \ldots),$$

и что любая из функций $\Phi_m(x)$ не принимает значений разных знаков на каждом из сегментов $[c_{j-1,\, m},\ c_{jm}]$ с тем же индексом m.

На основании леммы 2 мы можем теперь определить на каждом из сегментов $[c_{j-1,\, m},\ c_{jm}]$ непрерывную функцию $\psi_{jm}(x)$ и измеримое множество E_{jm}, которые удовлетворяют всем условиям этой леммы, если заменить в ней ν, $[c, d]$, $ax + b$ через $\left(\left[\frac{2\pi}{\sigma}\right] + 1\right) \cdot 2^{m+3}$***, $[c_{j-1,\, m}, c_{jm}]$, $\Phi_m(x)$ и вместо ε взять некоторое положительное число ε_{jm}, соответствующим образом подобранное.

Обозначим через $\Psi_m(x)$ непрерывную функцию, определенную на сегменте $[-\pi, \pi]$, которая совпадает с функцией $\psi_{jm}(x)$ на каждом из сегментов $[c_{j-1,\, m},\ c_{jm}]$, $1 \leqslant j \leqslant N_m$. При подходящем подборе чисел ε_{jm} можно доказать, что ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \Psi_m(x)$ равномерно сходится на сегменте $[-\pi, \pi]$ к некоторой непрерывной функции $G(x)$ и что ряд Фурье от этой последней функции сходится почти всюду на $[-\pi, \pi]$. ****

---

* При доказательстве леммы 2 надо пользоваться леммой 1.

** Н. Н. Лузин, Sur les propriétés des fonctions mesurables, C. R. Ac. Sci., Paris, **154**, 1688 (1912).

*** Мы обозначаем, как обычно, через $\left[\frac{2\pi}{\sigma}\right]$ целую часть от $\frac{2\pi}{\sigma}$.

**** Числа ε_{jm} должны очень сильно убывать, когда j возрастает при данном m; кроме того $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant N_m} \varepsilon_{jm}$ должен очень быстро стремиться к нулю, когда $m \to \infty$.

Полагая

$$\Pi = \prod_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_m} E_{j_m},$$

можно доказать, кроме того, что

$$G(x) = f(x) \qquad (x \subset \Pi),$$
$$\operatorname{mes} \Pi > 2\pi - \sigma, \;\; \Pi \subset [-\pi, \pi].$$

Следовательно, функция $G(x)$ и множество Π удовлетворяют всем условиям теоремы 1.

Пользуясь теоремой 1, можно доказать еще следующую теорему.

Теорема 2. *Для любой измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на $[-\pi, \pi]$, можно определить тригонометрический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

который сходится почти всюду к этой функции.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академия Наук СССР

Поступило
12 XII 1939