Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 3

МАТЕМАТИКА

А. С. КОВАНЬКО

О КОМПАКТНОСТИ СИСТЕМ ОБОБЩЕННЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В. В. СТЕПАНОВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 XII 1939)

Цель настоящей заметки—дать условия компактности систем обобщенных почти периодических функций В. Степанова [1].

Чтобы решить эту проблему, нам пришлось воспользоваться результатами Л. Люстерника [2] касательно компактности систем почти периодических функций Х. Бора, а также нашими результатами [3] по теории пространств функций Степанова. Нам необходимо также ввести некоторые обозначения и формулы, нужные для дальнейшего.

§ 1. Обозначения

1. Пусть E—линейное измеримое множество, расположенное на $(-\infty < x < +\infty)$, и пусть $E(a, b)$—его часть внутри $(a \leqslant x \leqslant b)$.

Пусть

$$\delta E(a, b) = \frac{\text{mes}\, E(a, b)}{b-a}.$$

Мы положим $\delta_s^e E = \underset{-\infty<x<+\infty}{\text{верх. гран.}}\ \delta E(x, x+e)$.

Совершенно очевидно, что $\delta_s^e(E_1+E_2) \leqslant \delta_s^e E_1 + \delta_s^e E_2$, если $E_1 E_2$—пустое множество.

2. Введем понятие длины $\vartheta_s^e(f, \varphi)$ между двумя измеримыми функциями $f(x)$ и $\varphi(x)$, которые определены на $(-\infty < x < +\infty)$. Пусть E_a—множество значений x тех, где $|f(x)-\varphi(x)| \geqslant a \geqslant 0$. Мы полагаем

$$\vartheta_s^e(f, \varphi) = \underset{0\leqslant a<\infty}{\text{нижн. гран.}}\ (a + \delta_s^e E_a).$$

Легко видеть, что $\vartheta_s^e(f_1, f_2) \leqslant \vartheta_s^e(f_1 f_3) + \vartheta_s^e(f_2 f_3)$.

3. Введем еще понятие срезанной функции. Пусть $f(x)$ измерима на $(-\infty < x < +\infty)$. Положим $[f(x)]_N = f(x)$ там, где $|f(x)| < N$, и $[f(x)]_N = N \cdot \frac{f(x)}{|f(x)|} \ldots$ там, где $|f(x)| \geqslant N$.

4. Пусть $f(x)$—суммируемая функция на $(-\infty < x < +\infty)$. Положим $\bar{f}_e(x) = \frac{1}{e}\int\limits_x^{x+e} f(t)\,dt$ (усредненная функция).

5. Пусть $\omega \geqslant 1$. Введем понятие длины $D^e_{s_\omega}$ между двумя функциями $f(x)$ и $\varphi(x)$ на $(-\infty < x < +\infty)$, у которых $|f|^\omega$ и $|\varphi|^\omega$ суммируемы следующим образом:

$$D^e_{s_\omega}(f, \varphi) = \underset{-\infty<x<+\infty}{\text{верх. гран.}} \left\{ \frac{1}{e} \int\limits_x^{x+e} |f-\varphi|^\omega \, dt \right\}^{\frac{1}{\omega}}.$$

Аналогично напишем $D^{eE}_{s_\omega}(f, \varphi) = \underset{-\infty<x<+\infty}{\text{верх. гран.}} \left\{ \frac{1}{e} \int\limits_x^{x+e} |f-\varphi|^\omega \, \widehat{dt} \right\}^{\frac{1}{\omega}}$. Таким образом $D^e_{s_\omega}$ есть частный случай $D^{eE}_{s_\omega}$—тот, при котором $E = (-\infty, +\infty)$. Совершенно очевидно, что

$D^{eE}_{s_\omega}(f_1, f_3) \leqslant D^{eE}_{s_\omega}(f_1 f_3) + D^{eE}_{s_\omega}(f_2 f_3)$, $D^{eE_1}_{s_\omega}(f, \varphi) \leqslant D^{eE_2}_{s_\omega}(f, \varphi)$, если $E_1 \subset E_2$.

§ 2. Некоторые определения

1. Измеримая функция $f(x)$ на $(-\infty < x < +\infty)$ называется S почти периодической («S пп»), если, каковы бы ни были числа $\varepsilon > 0$ и $e > 0$, существует относительно плотное* множество чисел $\{\tau\}$ (почти периоды) таких, что

$$\vartheta^e_s(f(x+\tau), f(x)) < \varepsilon.$$

2. Функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, у которой $|f|^\omega (\omega \geqslant 1)$ суммируема, называется S_ω почти периодической («S_ω пп»), если, каковы бы ни были числа $\varepsilon > 0$ и $e > 0$, существует относительно плотное* множество чисел $\{\tau\}$ (почти периоды) таких, что

$$D^e_{s_\omega}(f(x+\tau), f(x)) < \varepsilon.$$

3. Множество E элементов $\{x\}$ некоторого полного пространства D называется компактным, если из всякой бесконечной последовательности элемента E возможно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

4. Функция $f(x)(-\infty < x < +\infty)$ называется «S нормальный», если множество всех ее смещений $\{f(x+k)\}$ (k—любое) компактно в себе самом в смысле сходимости, определенной расстоянием ϑ^e_s.

5. Функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ называется «S_ω нормальный», если множество всех ее смещений $\{f(x+k)\}$ (k—любое) компактно в себе самом в смысле сходимости, определенной расстоянием $D^e_{s_\omega}$.

§ 3. Теоремы

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{M}(f)$—система «S_ω пп» функций в пространстве*** *всех «S_ω пп» функций.*

Необходимое и достаточное условие, чтобы $\mathfrak{M}(f)$ была компактна в смысле сходимости, определенной расстоянием $D^e_{s_\omega}$ (для всякого постоянного «e»), состоит в следующем: каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и $e > 0$, система $\mathfrak{M}(f)$ удовлетворяет следующим свойствам:

1°. Существует положительное число $\sigma = \sigma(\varepsilon, e)$ такое, что $D^{eE}_{s_\omega}(f, 0) < \varepsilon$ при $\delta^e_s E < \sigma$ для любой функции f из $\mathfrak{M}(f)$.

---

* Множество называется относительно плотным, если внутри всякого интервала $(x, x+a$, где a постоянно) существуют точки множества.

** Это пространство полное [см.[3]].

2°. Существует положительное число $\rho = \rho(\varepsilon, e)$ такое, что $D^{e}_{s_\omega}(f, \bar{f}_h) < \varepsilon$ при $h < \rho$ для всякой функции f из $\mathfrak{M}(f)$.

3°. Существует общее относительно плотное множество почти периодов $\{\tau\}$ для всех функций системы $\mathfrak{M}(f)$ таких, что

$$D^{e}_{s_\omega}(f(x+\tau), f(x)) < \varepsilon \quad \text{для} \quad f \subset \mathfrak{M}(f).$$

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{M}(f)$—система «S пп» функций в пространстве* всех «S пп» функций.*

Необходимое и достаточное условие, чтобы $\mathfrak{M}(f)$ была компактна в смысле сходимости, определенной расстоянием ϑ^{e}_{s} (для всякого постоянного «e»), состоит в следующем: каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и $e > 0$, система $\mathfrak{M}(f)$ обладает следующими свойствами:

1°. Существует такое число $N_0 = N_0(\varepsilon, e) > 0$, что $\vartheta^{e}_{s}(f, [f]_N) < \varepsilon$ для $N > N_0$ и для всякой функции f системы $\mathfrak{M}(f)$.

2°. Существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon, e)$, что $\vartheta^{e}_{s}(f(x+h), f(x)) < \varepsilon$ при $|h| < \varepsilon$ для всякой функции f системы $\mathfrak{M}(f)$.

3°. Существует относительно плотное множество почти периодов $\{\tau\}$, общих всем функциям системы $\mathfrak{M}(f)$, таких, что

$$\vartheta^{e}_{s}(f(x+\tau), f(x)) < \varepsilon \quad \text{для} \quad f \subset \mathfrak{M}(f).$$

Теорема 3. *Всякая «S пп» функция есть функция «S нормальная», и наоборот.*

Теорема 4. *Всякая «S_ω пп» функция есть функция «S_ω нормальная», и наоборот.*

Примечание. В теоремах 1 и 2 было бы достаточно считать e как угодно малым, так как, если условия теоремы соблюдены соответственно для $e = e_1$, они также соблюдены для $e > e_1$ (при замене ε на 2ε).

Поступило
12 XII 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Stepanoff, Math. Ann., Bd. 95, H. 4 (1926). [2] Л. Люстерник, Успехи математических наук, вып. 1, стр. 98. [3] А. Кованько, Изв. НИИММ при Томском гос. ун-те, т. 1, вып. 2, стр. 148—154.

* Это пространство полное [см.[3]].