Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XXI, № 9

ФИЗИКА

Ю. М. ИВАНОВ

ДЛИТЕЛЬНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ УПРУГО-ВЯЗКОГО МАТЕРИАЛА

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 9 XI 1938)

По теории упруго-вязкого тела Максвелла (1) упругая деформация и скорость пластического течения неограниченно возрастают при неограниченном увеличении напряжения:

$$[l]_{\sigma=\infty}=[k\sigma]_{\sigma=\infty}=\infty$$

и

$$\left[\frac{d\lambda}{dt}\right]_{\sigma=\infty}=\left[\frac{1}{\eta}\,\sigma\right]_{\sigma=\infty}=\infty,$$

где l — упругая деформация (относительная), λ — пластическая деформация (относительная), σ — напряжение, t — время, k — коэффициент упругости *, η — коэффициент вязкости.

В действительности существует некоторое предельное напряжение σ_{max}, которое вызывает разрушение материала при мгновенном приложении **. Предельная величина упругой деформации равна

$$l_{max}=k\sigma_{max}. \tag{1}$$

Соответственно предельная величина скорости пластического течения

$$\left[\frac{d\lambda}{dt}\right]_{\sigma_{max}}=\frac{1}{\eta}\,\sigma_{max}. \tag{2}$$

Очевидно по превышении указанных предельных значений формулы теории уже не будут изображать реальный процесс деформирования. Следовательно в этом смысле существуют интервалы реальных значений соответствующих величин, а именно:

для напряжения $0<\sigma<\sigma_{max}$,

для упругой деформации $0<l<l_{max}=k\sigma_{max}$,

для скорости пластического течения $0<\frac{d\lambda}{dt}<\left[\frac{d\lambda}{dt}\right]_{\sigma_{max}}=\frac{1}{\eta}\,\sigma_{max}$.

Интегрируя дифференциальное уравнение Максвелла (1)

$$\frac{dL}{dt}=k\,\frac{d\sigma}{dt}-\frac{1}{\eta}\,\sigma, \tag{3}$$

* Например для чистого сдвига $k=\frac{1}{G}$, где G — модуль сдвига.

** Т. е. со скоростью звука.

для $\sigma = \text{const} = \sigma_0$ получим выражение полной деформации:

$$L = l + \frac{1}{\eta} \sigma_0 t. \tag{4}$$

Это выражение также дает неограниченное возрастание величины L при неограниченном увеличении времени t:

$$[L]_{t=\infty} = \left[l + \frac{1}{\eta} \sigma_0 t \right]_{t=\infty} = \infty.$$

Между тем известно, что наличие пластического течения с постоянной скоростью (ползучие деформации) есть признак того, что рано или поздно произойдет разрушение материала ([2], [3]).

Это значит, что рассмотренный процесс деформирования также не может продолжаться неограниченно. При этом продолжительность действия постоянного напряжения до момента разрушения определяется конечной величиной деформации, предельной для данной величины действующего напряжения.

Пользуясь кривой длительного сопротивления ([3]), дающей зависимость между σ и t, предельная величина пластической деформации λ_m была нами ранее получена ([3]) в виде:

$$\lambda_m = \frac{1}{\eta} \sigma_{\max}\, t\, e^{-\frac{1}{k\eta} t}. \tag{5}$$

Кривая предельных пластических деформаций (5) (фиг. 1 — нижняя кривая) проходит через начало координат.

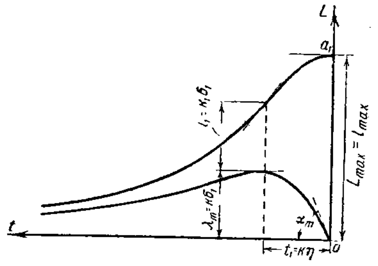
Тангенс угла наклона α_m касательной к кривой в начале координат

$$\operatorname{tg} \alpha_m = \left[\frac{d\lambda}{dt} \right]_{t=0} = \frac{1}{\eta} \sigma_{\max},$$

т. е. равен предельной скорости пластического течения (2).

Кривая (5) имеет максимум при значении абсциссы

$$t_1 = k\eta, \tag{6}$$



Фиг. 1.

что представляет собой так наз. время релаксации. Отсюда может быть дано следующее объяснение физического смысла этой величины, имеющей большое значение в теории Максвелла:

время релаксации представляет собой продолжительность действия постоянного напряжения, соответствующую максимальной величине предельной пластической деформации $\lambda_{\max}$.

Последнюю получим, подставив в уравнение (5) $t_1 = k\eta$:

$$\lambda_{\max} = k \frac{\sigma_{\max}}{e}. \tag{7}$$

Так как

$$\frac{\sigma_{\max}}{e} = \sigma_1,$$

имеем

$$\lambda_{\max} = k\sigma_1 = l_1, \tag{8}$$

т. е. условие максимума предельной пластической деформации заключается в ее равенстве упругой деформации при данном напряжении.

Суммируя предельную пластическую деформацию λ_m по уравнению (5) с соответствующей величиной упругой деформации, получим полную предельную деформацию в виде:

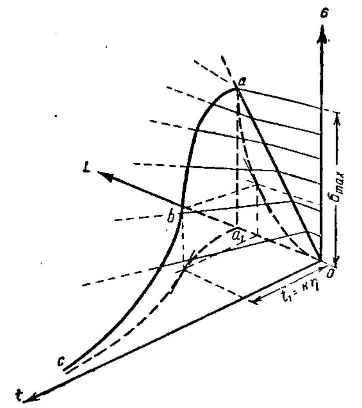
$$L_m = \sigma_{\max} e^{-\frac{1}{k\eta}t}\left(k + \frac{1}{\eta}t\right). \tag{9}$$

Начальная ордината этой кривой $k\sigma_{\max}$, т. е. равна величине предельной упругой деформации (1). Абсциссе $t_1 = k\eta$ максимума предельной пластической деформации $\lambda_{\max}$ соответствует точка перегиба на данной кривой (9) (фиг. 1 — верхняя кривая). Ордината этой точки

$$L_m = 2l_1, \tag{10}$$

т. е. равна удвоенной упругой деформации.

Таким образом кривая λ_m делит пополам ординату кривой L_m при значении абсциссы, равном $t_1 = k\eta$, т. е. времени релаксации.



Фиг. 2.—Область реальных значений переменных на поверхности σ=const.

Процесс деформирования при действии постоянного напряжения может быть изображен некоторой поверхностью $\sigma = \mathrm{const}$ в координатном пространстве $L - t - \sigma$, которую получим, заменив в уравнении (4) l на $k\sigma$:

$$L = k\sigma + \frac{1}{\eta}\sigma t. \tag{11}$$

След ее на плоскости $L\sigma$ — прямая $L = k\sigma$, а на плоскости σt — совпадает с осью ot.

На поверхности $\sigma = \mathrm{const}$ (11), которая по теории Максвелла является неограниченной, отделится область реальных значений переменных посредством некоторой пространственной кривой предельных деформаций, лежащей на данной поверхности (фиг. 2 — abc). Проекция этой кривой на плоскость Lt дана уравнением (9). Следовательно выражение искомой кривой предельных деформаций найдем в виде системы двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} L &= k\sigma + \frac{1}{\eta}\sigma t \\ L &= \sigma_{\max} e^{-\frac{1}{k\eta}}\left(k + \frac{1}{\eta}t\right) \end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

Исключив t из этих уравнений, найдем ее проекцию на плоскость $L\sigma$ в виде:

$$L = k\sigma\left(1 + \ln\frac{\sigma_{\max}}{\sigma}\right). \tag{13}$$

Ордината σ_1 точки кривой (12) при значении предельной деформации $L_m = 2l_1$ равна

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{\max}}{e}, \tag{14}$$

где e — основание натуральных логарифмов. Это также следует из определения времени релаксации $t_1 = k\eta$, представляющего абсциссу той же точки.

Интегрируя дифференциальное уравнение (3) для $L = \mathrm{const}$, получим уравнение релаксации:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{1}{k\eta}t}. \tag{15}$$

Процесс релаксации напряжения при постоянной деформации также может быть изображен некоторой поверхностью $L = \mathrm{const}$, которую получим, заменив в уравнении (15) σ_0 на $\frac{1}{k} L$:

$$\sigma = \frac{1}{k} L e^{-\frac{1}{k\eta} t}. \tag{16}$$

След ее на плоскости $L\sigma$ — прямая $\sigma = \frac{1}{k} L$, а на плоскости σt — совпадает с осью ot, т. е. совпадает со следами на этих плоскостях поверхности $\sigma = \mathrm{const}$ (11).

На поверхности $L = \mathrm{const}$ (16), которая по теории Максвелла является также неограниченной, отделится область реальных значений переменных посредством кривой, которая очевидно получится в пересечении данной поверхности (16) с плоскостью

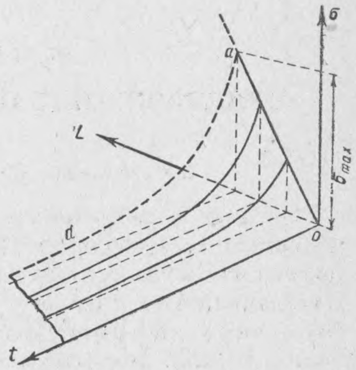
$$L = k\sigma_{\max}. \tag{17}$$

Полученная плоская кривая (фиг. 3 — ad)

$$\sigma = \sigma_{\max} e^{-\frac{1}{k\eta} t} \tag{18}$$

является лишь теоретической кривой, с которой стремятся слиться действительные кривые релаксации при приближении величины начального напряжения к пределу, равному $\sigma_{\max}$.

Очевидно этот предел практически никогда не может быть достигнут, так как мгновенное приложение $\sigma_{\max}$ уже вызывает разрушение материала.



Фиг. 3.—Область реальных значений переменных на поверхности $L = \mathrm{const}$.

Кривая (18) может быть названа «теоретической кривой релаксации для предельного напряжения $\sigma_{\max}$».

Реальный смысл эта кривая получает лишь в том случае, если за абсциссы ее точек считать не продолжительность выдерживания при постоянной деформации (что соответствует процессу релаксации), а продолжительность действия постоянного напряжения.

Тогда эта кривая очевидно представит зависимость между величиной постоянного напряжения σ и продолжительностью t его воздействия до момента разрушения, что, как известно, изображается кривой длительного сопротивления.

Следовательно кривая длительного сопротивления есть теоретическая кривая релаксации для предельного напряжения $\sigma_{\max}$, что было нами ранее установлено ([3]).

Отметим, что это положение имеет более общее принципиальное значение, так как не зависит от вида математического выражения процесса релаксации.

Таким образом кривая длительного сопротивления является условной кривой.

В основе ее построения лежит кривая предельных деформаций (12), которая определяет действительную величину деформации при разрушении.

Центральный научно-исследовательский институт промышленных сооружений НКТП. Москва.

Поступило 26 IX 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. C. Maxwell, Phil. Mag., 4, 35, 129 (1868). [2] Ю. М. Иванов, ДАН, XIX, № 6—7, 549 (1938). [3] Ю. М. Иванов, ЖТФ, VIII, № 15, 1366 (1938).