Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XXI, № 9

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. АНДРОНОВ и Е. ЛЕОНТОВИЧ

К ТЕОРИИ ИЗМЕНЕНИЙ КАЧЕСТВЕННОЙ СТРУКТУРЫ РАЗБИЕНИЯ ПЛОСКОСТИ НА ТРАЕКТОРИИ

(Представлено академиком Л. И. Мандельштамом 31 X 1938)

При исследовании физических систем нельзя ограничиться изучением грубых систем (1). И не только потому, что для некоторых специальных целей имеет смысл рассматривать негрубые системы, например консервативные, но прежде всего потому, что при изменении параметра в динамической системе мы переходим от одной грубой системы к другой, качественно отличной грубой системе через негрубые системы.

Отсюда возникает задача исследования негрубых систем и их классификации, которая тесно связана с теорией зависимости от параметра качественной структуры разбиения фазовой плоскости на траектории.

Настоящая заметка содержит определение и исследование простейшего типа таких систем, именно систем релативно грубых по отношению к множеству негрубых систем *.

Рассмотрим динамическую систему, определяемую двумя уравнениями первого порядка:

$$\frac{dx}{dt}=P(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=Q(x, y), \tag{A}$$

где x и y — декартовы координаты на плоскости, а $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — аналитические функции для всех рассматриваемых значений переменных x и y.

В дальнейшем подобно тому, как это было сделано при рассмотрении грубых систем, ограничимся такими системами вида (A), для которых существует так называемый «цикл без контакта», т. е. такая простая замкнутая кривая g с непрерывно вращающейся касательной, что все траектории, проходящие через точки этой кривой, ее пересекают, и ни одна траектория ее не касается. Областью G назовем область плоскости внутри кривой g.

Рассмотрим наряду с системой (A) измененную систему:

$$\frac{dx}{dt}=P(x, y)+p(x, y); \quad \frac{dy}{dt}=Q(x, y)+q(x, y), \tag{B}$$

где $p(x, y)$ и $q(x, y)$—также аналитические функции для всех рассматриваемых значений переменных x и y.

* Заметим, что тип негрубых систем, рассматриваемый в настоящей заметке, имеет фундаментальное значение во многих физических вопросах, связанных с поведением динамических систем при изменении параметра (2).

Определение 1. Систему (A) мы будем называть негрубой системой первого порядка в области G, если

a) она не является грубой,

b) для всякого $\eta > 0$ можно указать такое $\varepsilon > 0$, что при всех $p(x, y)$ и $q(x, y)$, при которых система (B) не является грубой и при которых в области G удовлетворяются условия:

$$|p(x, y)| < \varepsilon, \quad |q(x, y)| < \varepsilon,$$
$$|p'_x(x, y)| < \varepsilon, \quad |p'_y(x, y)| < \varepsilon, \quad |q'_x(x, y)| < \varepsilon, \quad |q'_y(x, y)| < \varepsilon,$$
$$|p''_{xx}(x, y)| < \varepsilon, \quad |p''_{xy}(x, y)| < \varepsilon, \quad |p''_{yy}(x, y)| < \varepsilon,$$
$$|q''_{xx}(x, y)| < \varepsilon, \quad |q''_{xy}(x, y)| < \varepsilon, \quad |q''_{yy}(x, y)| < \varepsilon,$$

существует взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное преобразование T области G (вместе с границами) самое в себя, при котором:

1) соответствующие точки находятся на расстоянии, меньшем η,

2) точкам, лежащим на одной и той же траектории системы (A), соответствуют точки, лежащие на одной и той же траектории системы (B), и наоборот *.

Необходимые условия того, что система (A) является негрубой системой первого порядка в области G**, могут быть сформулированы в виде следующих девяти предложений.

Пусть x_0, y_0 — координаты состояния равновесия. Введем обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0), & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0), & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}, \quad \sigma = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0).$$

Теорема 1. *Негрубая система первого порядка в области G не имеет состояний равновесия, для которых одновременно $\Delta = 0$, $\sigma = 0$.*

Пусть мы имеем состояние равновесия, для которого $\Delta = 0$, $\sigma \neq 0$. В окрестности такого состояния равновесия систему (A) всегда можно, на основании результатов Бендиксона (3), привести к виду:

$$\frac{dx}{dt} = P_2(x, y) + \ldots; \quad \frac{dy}{dt} = y - kx + Q_2(x, y) + \ldots,$$

где $P_2(x, y)$ и $Q_2(x, y)$ — члены второй степени относительно x и y, а невыписанные члены — третьей степени и выше.

Теорема 2. *Негрубая система первого порядка в области G не имеет состояний равновесия, для которых $\Delta = 0$, $\sigma \neq 0$, $P_2(1, k) = 0$.*

В дальнейшем состояние равновесия, для которого $\Delta = 0$, $\sigma \neq 0$, $P_2(1, k) \neq 0$, мы будем называть «седло-узел».

Пусть мы имеем состояние равновесия, для которого $\Delta > 0$, $\sigma^2 < 4\Delta$. Переходя к полярным координатам $x - x_0 = \rho\cos\varphi$, $y - y_0 = \rho\sin\varphi$ и исключая t, получим:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho R_1(\varphi) + \rho^2 R_2(\varphi) + \rho^3 R_3(\varphi) + \ldots$$

Теорема 3. *Негрубая система первого порядка в области G не имеет состояний равновесия, для которых****

$$\sigma = 0, \quad \Delta > 0, \quad \alpha_3 = \int_0^{2\pi} R_3(\varphi)\, d\varphi.$$

---

* Аналогично можно определить негрубые системы 2-го, 3-го и т. д. порядка, как релятивно грубые.

** В дальнейшем, говоря о негрубых системах 1-го порядка в области G, мы для краткости будем опускать слова «в области G».

*** Если $\sigma = 0$, то $R_1(\varphi) = 0$ и $\int_0^{2\pi} R_2(\varphi)\, d\varphi = 0$.

Состояние равновесия, у которого $\sigma=0$, $\Delta>0$, $\alpha_3\neq 0$, мы будем называть «сложным фокусом первого порядка».

Пусть $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $[\varphi(t+\tau)=\varphi(t)$, $\psi(t+\tau)=\psi(t)]$ периодическое решение системы (A), соответствующее замкнутой траектории, расположенной в области G.

Теорема 4. *Негрубая система первого порядка в области G не имеет замкнутых траекторий, для которых*

$$h=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau [P'_x(\varphi,\psi)+Q'_y(\varphi,\psi)]\,ds=0$$

и одновременно

$$h_2=-\int_0^\tau \Big\{\rho f\,[(P''_{xx}-P''_{yy})\dot\psi+(Q''_{xx}-Q''_{yy})\dot\varphi+2(Q''_{xy}\dot\psi-P''_{xy}\dot\varphi)]+$$

$$+2\rho^2 f\,[(P'_x+Q'_y)(\dot\varphi\ddot\psi-\dot\psi\ddot\varphi)+(P'_y-Q'_x)(\dot\varphi\ddot\varphi+\dot\psi\ddot\psi)]\Big\}\,ds=0,$$

$$\Big\{f(s)=\exp\int_0^s [P'_x(\varphi,\psi)+Q'_y(\varphi,\psi)]\,ds;\quad \rho(s)=[\dot\varphi^2+\dot\psi^2]^{-1}\Big\}.$$

Замкнутую траекторию, для которой $h=0$, $h_2\neq 0$, мы будем называть «двойным предельным циклом».

Будем называть ω или α орбитно-неустойчивые ([4]) полутраектории, имеющие своими ω или α предельными точками седло ($\Delta<0$) или седло-узел, соответственно сепаратрисами (усами) седла и сепаратрисами (усами) седла-узла.

Теорема 5. *Негрубая система первого порядка в области G не имеет сепаратрис, идущих из седла в то же самое седло, если в этом седле $\sigma=0$.*

Будем называть орбитно-неустойчивые траектории, которые могут быть в грубых системах, грубыми орбитно-неустойчивыми траекториями*. Все другие орбитно-неустойчивые траектории будем называть негрубыми орбитно-неустойчивыми траекториями.

Определение 2. Мы скажем, что негрубая орбитно-неустойчивая траектория L_1 независима, если, какую бы другую негрубую орбитно-неустойчивую траекторию L_2 мы ни взяли, множество точек L_1 и ее ω и α предельных точек и множество точек L_2 и ее ω и α предельных точек либо не пересекаются, либо пересекаются по грубым орбитно-неустойчивым траекториям, либо множество точек их пересечения совпадает с множеством точек L_1 и ее ω и α предельными точками.

Теорема 6. *В негрубой системе первого порядка в области G не может быть двух негрубых независимых орбитно-неустойчивых траекторий.*

Теорема 7. *В негрубой системе первого порядка в области G не может быть ни сепаратрис седла-узла, идущих в седло (или из седла), ни двух сепаратрис седла-узла, являющихся продолжением одна другой.*

---

* Грубыми орбитно-неустойчивыми траекториями являются следующие траектории:

1) состояние равновесия, для которого $\Delta\neq 0$ и, если $\Delta>0$, то $\sigma\neq 0$,
2) замкнутая траектория, для которой $h\neq 0$,
3) сепаратриса седла, не идущая из седла в седло, среди предельных точек которой могут быть лишь орбитно-неустойчивые траектории типа (1) и (2).

Всякая орбитно-неустойчивая траектория, отличная от перечисленных, является негрубой.

Теорема 8. *В негрубой системе первого порядка в области G не может быть двух сепаратрис седел, одна из которых накручивается на двойной предельный цикл, а другая скручивается с этого цикла.*

Теорема 9. *В негрубой системе первого порядка в области G не может быть сепаратрисы, идущей из седла в то же самое седло, на которую накручивается (или с которой скручивается) сепаратриса другого седла.*

Мы скажем, что система (A) в области G удовлетворяет условиям Γ', если в области G:

a) она имеет одну и только одну негрубую независимую орбитно-неустойчивую траекторию;

b) эта негрубая, независимая орбитно-неустойчивая траектория принадлежит лишь к одному из следующих типов:

1) Сложный фокус первого порядка ($\Delta > 0,\ \sigma = 0,\ \alpha_3 \neq 0$),

2) седло-узел [$\Delta = 0,\ \sigma \neq 0,\ P_2(1, k) \neq 0$],

3) двойной предельный цикл ($h = 0,\ h_2 \neq 0$),

4) сепаратриса, идущая из седла в седло, причем если она возвращается в то же седло, то в этом седле $\sigma \neq 0$;

c) сепаратрисы седел и седел-узлов (являющиеся не независимыми негрубыми орбитно-неустойчивыми траекториями) удовлетворяют следующим требованиям:

1) сепаратриса седла не может накручиваться на сепаратрису другого седла, идущую из седла в то же самое седло (или скручиваться с нее),

2) сепаратриса седла не может накручиваться на двойной цикл, если есть сепаратриса, скручивающаяся с него (и наоборот),

3) сепаратрисы седла-узла не могут ни итти в седло, ни являться продолжением одна другой.

Теорема 10. *Если система* (A) *удовлетворяет в области G условиям Γ', то она является негрубой системой первого порядка в области G.*

Физико-технический институт университета.
Горький.

Поступило
1 XI 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Андронов и Л. Понтрягин, ДАН, XIV, 247 (1937). [2] А. Андронов и Е. Леонтович, Ученые записки Горьковского госуд. университета, **6**, 1 (1938). [3] Bendixon, Acta Mathematica, **24**, 1 (1901). [4] Е. Леонтович и А. Майер, ДАН, XIV, 251 (1937).