Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XXI, № 9

МАТЕМАТИКА

Н. Г. ЧУДАКОВ

О ФУНКЦИЯХ $\zeta(s)$ и $\pi(x)$

(Прздставлено академиком И. М. Виноградовым 1 XI 1938)

1°. Прилагая метод Виноградова в форме, данной Van der Corput'ом (1), я доказываю следующую теорему:

(A) Пусть $f(x)=a_nx^n+\ldots+a_0$, где $n\geqslant 10$; $a_n\ldots a_0$ — действительные числа; $q=|a_n|^{-1}>8n$; μ — действительное число, которое удовлетворяет условию

$$q^{\frac{1}{n}}\leqslant\mu\leqslant q(2n)^{-1};$$

X — целое $\leqslant\mu$; P — произвольное целое; A, c, $c_1\ldots$ — положительные постоянные.

Тогда

$$\sum_{X=P+1}^{P+X}\exp 2\pi i f_n(x)=0\,[n^c\mu q^{-\frac{A}{n^4\lg n}}(\lg q)^2+q^{\frac{1}{n-1}}].$$

2°. Теорема (A) позволяет доказать теорему (B)

$$\zeta(s)=0\,[\exp\Phi(t)],\quad \text{если } \sigma\geqslant 1-(\lg t)^{-\eta},$$

где α — любое число между $\frac{3}{4}$ и 1; $\frac{3}{4}<\eta<\alpha$; $0<1-\gamma\eta<\alpha-\eta$,

$$\Phi(t)=0\,[(\lg t)^{1-\gamma\eta}].$$

Доказательство. Известно, что

$$\zeta(s)=\sum_{m=1}^{t^{\frac{1}{10}}}n^{-s}+0(\lg^2 t),\quad \text{если } \sigma\geqslant 1-2^{-9}11^{-1}. \tag{1}$$

Пусть $\lg T=(\lg t)^{\eta}$; тогда

$$\sum_{1}^{T}n^{-s}=0\,(T^{1-\sigma}\lg T)=0\,(\lg^{\eta}t). \tag{2}$$

Очевидно, что

$$\sum_{T}^{t^{\frac{1}{10}}}n^{-s}=0\Big(\lg t\max_{N}N^{-\sigma}\max_{N\leqslant N'\leqslant 2N}\Big|\sum_{N}^{N'}n^{ti}\Big|\Big). \tag{3}$$

Пусть

$$\mu=\Big[\tfrac{1}{2}Nt^{-\frac{1}{n+1}}\Big].$$

Тогда (2):

$$\sum_{P+1}^{P+\mu}n^{ti}=0\Big(\max_{1\leqslant \overline{X}\leqslant\mu}\Big|\sum_{X=1}^{X}\exp 2\pi i f_n(x)\Big|\Big),$$

где

$$P = N + m\mu\left(m = 1 \ldots \left[\frac{N'}{\mu}\right] + 1\right); \quad f_n(x) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \frac{x^m t}{2\pi m P^m};$$

$$n = \left[\frac{3}{2} \frac{\lg t}{\lg N}\right].$$

Используя теорему (A), получаем:

$$\max_{1 \leqslant X \leqslant \mu} \left| \sum_{X=1}^{X} \exp 2\pi i f_n(x) \right| = 0 \left(n^c \mu q^{-\frac{A}{n^4 \lg n}} (\lg q)^2 + q^{\frac{1}{n-1}}\right).$$

Это дает нам

$$\max_N N^{-\sigma} \max_{N \leqslant N' \leqslant 2N} \left| \sum_N^{N'} n^{ti} \right| = 0 \left[N^{1-\sigma} \left(n^c q^{-\rho} (\lg q)^2 + \frac{1}{\mu} q^{\frac{1}{n-1}}\right)\right], \tag{4}$$

где

$$\rho = A \left(\frac{\lg N}{\lg t}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}.$$

Легко теперь обнаружить, что

$$\frac{1}{\mu} q^{\frac{1}{n-1} + \rho} = 0\,(1).$$

Таким образом второй член (4) может быть опущен, и мы получаем с помощью (3) и (4):

$$\sum_T^{t^{\frac{1}{10}}} n^{-s} = 0\,[(\lg t)^c \max_N N^{1-\sigma} t^{-\rho}]. \tag{5}$$

Легко обнаружить, что

$$\max_N N^{1-\sigma} t^{-\rho} = 0\,[\exp \Phi_1(t)],$$

где

$$\Phi_1(t) = 0\,[(\lg t)(1-\sigma)^\gamma] = 0\,[(\lg t)^{1-\eta\gamma}].$$

(1), (2), (5) и (6) дают нам

$$\zeta(s) = 0\,[\exp \Phi(t)], \quad \text{если } \sigma \geqslant 1 - (\lg t)^{-\eta}$$

и

$$\Phi(t) = 0\,[(\lg t)^{1-\eta\gamma}].$$

3°. Используя теперь теорему Titchmarsh'а ([3]), получаем:

$$\zeta(s) \neq 0, \text{ если } \sigma \geqslant 1 - c(\lg t)^{-\alpha} \geqslant 1 - c(\lg t)^{-\eta-1+\eta\gamma},$$

ибо

$$\alpha > \eta + 1 - \gamma\eta.$$

4°. При помощи хорошо известного метода получаем:

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dx}{\lg x} + 0\,(xe^{-c(\lg x)^\mu}),$$

где $\pi(x)$—число простых чисел $\leqslant x$; μ—произвольное число $< \frac{4}{7}$.

Этот результат представляет собой улучшение результата Titchmarsh'а ([4]) и моего ([3]).

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
2 XI 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Van der Corput, Über Weylsche Summen, Mathematica B (1936—1937).
[2] E. Landau, Vorlesungen, II, 386.
[3] Н. Г. Чудаков, ДАН, 5 (1936).
[4] E. C. Titchmarsh, The Quarterly Journ. of Mathematics, 9, 34 (1938).