Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XXI, № 9

МАТЕМАТИКА

М. М. ГРИНБЛЮМ

ОБ ОДНОМ ОТОБРАЖЕНИИ ПРОСТРАНСТВ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 28 X 1938)

I. Пусть $\mathfrak{A}$ — пространство числовых последовательностей с единичной базой, т. е. пространство типа (B) числовых последовательностей, содержащее все элементы вида

$$\eta^n \equiv \{\underbrace{0, 0, \ldots 0}_{n-1}, 1, \underbrace{0, 0 \ldots}\},$$

в котором всякий элемент a может быть представлен и единственным образом в виде:

$$a = a_1\eta' + a_2\eta^2 + \ldots, \tag{1}$$

где $a \equiv \{a_1, a_2, \ldots\}$.

Очевидно, что всякий линейный функционал $V(a)$, определенный в $\mathfrak{A}$, может быть представлен в виде:

$$V(a) = b_1a_1 + b_2a_2 + \ldots + b_na_n + \ldots, \tag{2}$$

где $b_i = V(\eta^i)$. Для дальнейшего важно отметить, что и обратно, если для какой-нибудь последовательности чисел $\{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$ ряды $\sum\limits_1^\infty b_ia_i$ сходятся для всех $a \in \mathfrak{A}$, то $\sum\limits_1^\infty b_ia_i$ — линейный функционал в $\mathfrak{A}$.

II. Пусть теперь E — некоторое пространство типа (B) и $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n, \ldots$ — полная последовательность элементов этого пространства.

Предположим теперь, что, каков бы ни был элемент $a \in \mathfrak{A}$, ряд $\sum\limits_1^\infty a_ix_i$ сходится слабо к некоторому элементу $x \in E$. Элементы $x \in E$, представленные в виде «суммы» слабо сходящихся рядов $\sum\limits_1^\infty a_ix_i$, где $a \in \mathfrak{A}$, образуют линейное многообразие, всюду плотное в E. Обозначим это многообразие через D. Обозначим далее через

$$x = L(a)$$

аддитивный и однородный оператор, преобразующий $\mathfrak{A}$ в D. $L(a) =$ $=$ «сумме» слабо сходящегося ряда $\sum_{1}^{\infty} a_i x_i$, где $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$.

Теорема 1. *Оператор $x = L(a)$ — непрерывен.*

Доказательство. Достаточно доказать, что, какова бы ни была последовательность $a^1, a^2, \ldots, a^n, \ldots$ элементов $a^n \equiv \{a_1^m, a_2^m, \ldots\}$ пространства $\mathfrak{A}$, сходящаяся к нулевому элементу, нормы элементов соответствующей последовательности в $E - x^1, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ будут ограничены. Заметим, во-первых, что если F—линейный функционал в E и $x \in D$, то

$$F(x) = \sum_{1}^{\infty} a_i F(x_i).$$

Далее, так как $\sum_{1}^{\infty} a^i F(x_i)$ сходится для любого $a \in \mathfrak{A}$, то $\sum_{1}^{\infty} a_i F(x_i)$ является линейным функционалом в $\mathfrak{A}$. Обозначим этот функционал через V. $[F(x_i) = V(\eta^i)]$. Тогда: $F(x) = V(a)$ для всех $x \in D$ $[x = L(a)]$.

Пусть теперь $a^m \longrightarrow \theta$ и $x^m = L(a^m) = \text{слаб.} \sum_{1}^{\infty} a_i^m x_i$.

Тогда

$$F(x^m) = V(a^m)$$

и следовательно $F(x^m) \longrightarrow 0$ при $m \longrightarrow \infty$.

Но F — произвольный линейный функционал в E, а следовательно нормы элементов x^m ограничены в своей совокупности, что и требовалось доказать.

Следствие. Пусть, как и ранее, $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$—последовательность элементов E и $\mathfrak{A}$—пр-во числовых последовательностей с единичной базой. Тогда:

Если ряды $\sum_{1}^{\infty} a_i x_i$ сходятся слабо для всех $a \in \mathfrak{A}$, то они сходятся сильно.

В самом деле, так как $\mathfrak{A}$ — пространство с единичной базой, то для всякого $a \in \mathfrak{A}$ имеет место $|a - \overline{a^n}| \longrightarrow 0$, где $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ и $\overline{a^n} = \{a_1, \ldots, a_n, \underbrace{0, 0, \ldots}\}$. Но тогда по теореме 1 $L(a) = \lim_{n \to \infty} L(\overline{a^n}) =$ $= \lim_{n \to \infty} \sum_{1}^{n} a_i x_i$.

III. Предположим теперь, что определенный выше оператор $x = L(a)$ осуществляет взаимно-однозначное отображение $\mathfrak{A}$ на D, т. е. что существует $L^{-1}(x) = a$.

Отметим следующие свойства отображения в этом случае:

1. Если D не совпадает с E, то существует последовательность $x^n = \sum_{1}^{\infty} a_i^n x_i$, сходящаяся к нулевому элементу, для которой соответствующая последовательность $a^n = L^{-1}(x^n)$ неограниченно расходится (т. е. $|a^n| \longrightarrow \infty$ при $n \longrightarrow \infty$).

2. Если D совпадает с E, то оператор L^{-1} непрерывен (см. книгу Banach'а).

3. Для того, чтобы пространство E было изоморфно с $\mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы в E существовала база, удовлетворяющая следующим условиям:

1) Каждый элемент $x \in E$ может быть представлен в виде $x = \sum_{1}^{\infty} a_i x_i$, где $a = \{a_i\}$—элемент $\mathfrak{A}$.

2) Если $a \in \mathfrak{A}$, то ряд $\sum_{1}^{\infty} a_i x_i$ сходится.

Примеры. 1) Пусть $f_1(x)$, $f_2(x) \ldots$—последовательность функций из $L_p\,(p > 1)$. Тогда:

Теорема. Если ряды $\sum_{1}^{\infty} a_i \int_{0}^{1} f_i(x)\,\alpha(x)\,dx$ сходятся, каков бы ни был элемент $a \in \mathfrak{A}$ и для любой функции $\alpha(x)$ из L_q, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то ряды: $\sum_{1}^{\infty} a_i f_i(x)$ сходятся по индексу p.

2) Пусть $f_1(x)$, $f_2(x)$, . . .—последовательность непрерывных функций.

Теорема. Если ряды $\sum_{1}^{\infty} a_i \int_{0}^{1} f_i(x)\,dg(x)$ сходятся, каков бы ни был элемент $a \in \mathfrak{A}$ и для всех функций $g(x)$ с ограниченной вариацией, и если всякий раз $\sum_{1}^{\infty} a_i \int_{0}^{1} f_i(x)\,dg(x) = \int_{0}^{1} f(x)\,dg(x)$, где $f(x)$—непрерывная функция (зависящая от $a \in \mathfrak{A}$), то ряды $\sum a_i f_i(x)$ сходятся равномерно.

IV. Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$—последовательность элементов пространства $\overline{E}$ [где E—некоторое пространство типа (B)].

Теорема 2. *Если ряды* $\sum_{1}^{\infty} a_i F_i(x)$ *сходятся для любого* $x \in E$ *и каков бы ни был элемент* a *из* $\mathfrak{A}$, *то*:

1. *Оператор* $F = L(a)$, *где* F—*элемент* $\overline{E}$, *определяемый рядом* $\sum a_i F_i(x)$, *непрерывен.*

2. *Ряды* $\sum_{i}^{\infty} a_i F_i$ *сходятся сильно.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Государственный университет.
Воронеж.

Поступило
1 XI 1938.