Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XXI, № 9

МАТЕМАТИКА

С. БАХВАЛОВ

О ПАРЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ КОНГРУЭНЦИЙ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 23 X 1938)

1. Установим взаимно-однозначное и непрерывное соответствие между точками A_0 и A_3 поверхностей A_0 и A_3 так, чтобы асимптотическим линиям одной поверхности соответствовали асимптотические линии другой поверхности.

Прямые l, соединяющие соответственные точки этих поверхностей, определяют некоторую конгруэнцию L.

Касательные плоскости к поверхностям A_0 и A_3 в соответственных точках пересекаются по прямым l'; эти прямые определяют вторую конгруэнцию L'.

Совокупность двух конгруэнций L и L' будем называть парой конгруэнций.

В предыдущей работе [1] были отмечены некоторые свойства пар конгруэнций L, L' гиперболического типа (с двумя различными фокусами).

В настоящей заметке рассматривается случай, когда одна из двух конгруэнций — параболического типа.

2. Пусть T — подвижной тетраэдр, определяющий эту пару конгруэнций. Поместим две вершины его в точках A_0 и A_3 поверхностей A_0 и A_3, третью вершину в фокусе A_1 луча l' и четвертую в некоторой точке A_2 луча l'.

Перемещение тетраэдра в проективном эвклидовом пространстве определяется следующей системой уравнений:

$$dA_j = \omega_{j0} \cdot A_0 + \omega_{j1} A_1 + \omega_{j2} \cdot A_2 + \omega_{j3} A_3. \qquad (1)$$

Дифференциальные формы $\omega_{ij} = a_{ij}\, du + b_{ij}\, dv$ удовлетворяют уравнениям

$$\omega'_{ij} = [\omega_{i0}\, \omega_{0j}] + [\omega_{i1}\, \omega_{1j}] + [\omega_{i2}\, \omega_{2j}] + [\omega_{i3}\, \omega_{3j}]. \qquad (2)$$

Так как плоскости $A_0A_1A_2$ и $A_3A_1A_2$ касаются соответственно поверхностей A_0 и A_3, то

$$\omega_{03} \equiv 0, \quad \omega_{30} \equiv 0. \qquad (3)$$

Из уравнения $\omega'_{03} \equiv 0$ следует, что

$$\omega_{13} = p\omega_{01} + q\omega_{02}, \quad \omega_{23} = q\omega_{01} + r\omega_{02}. \qquad (4)$$

Полагаем

$$\left.\begin{aligned} \omega_{31} &= u\omega_{01} + v\omega_{02} \\ \omega_{32} &= w\omega_{01} + t\omega_{02} \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_{10} &= \alpha\omega_{13} + \beta\omega_{23} \\ \omega_{20} &= \gamma\omega_{13} + \delta\cdot\omega_{23} \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

Фокусы $\psi_k = A_1 + \rho_k \cdot A_2$ $(k=1, 2)$ луча A_1A_2 определяются уравнением

$$\gamma\cdot\rho^2 + (\alpha - \delta)\cdot\rho - \beta = 0. \tag{7}$$

Предположим, что фокусы луча l совпадают с точкой A_1; из уравнения (7) следует, что

$$\beta = 0; \quad \alpha = \delta; \quad \gamma \not\equiv 0. \tag{8}$$

Из условия $\omega_{30}' \equiv 0$ и асимптотического соответствия поверхностей следует, что

$$u\alpha p + w(\gamma p + \alpha q) = p\cdot\theta; \qquad u\alpha q + w(\gamma q + \alpha r) = q\theta;$$
$$v\alpha p + t(\gamma p + \alpha\cdot q) = q\cdot\theta; \quad v\cdot\alpha q + t(\gamma\cdot q + \alpha r) = r\cdot\theta,$$

где θ—новая функция.

Из этих уравнений определяем:

$$u = \frac{\theta}{\alpha}; \quad w = 0; \quad v = -\frac{\gamma\theta}{\alpha^2}; \quad t = \frac{\theta}{\alpha}.$$

Случай $\Delta = \alpha^2(pr - q^2) = 0$ исключается, как не представляющий никакого интереса.

Полагая $\theta = \alpha^2\cdot\varsigma$, получаем следующую систему уравнений, определяющую пару конгруэнций:

$$\left.\begin{aligned} &\omega_{31} = \alpha\cdot\varsigma\cdot\omega_{01} - \gamma\cdot\varsigma\omega_{02}; \ \omega_{10} = \alpha\cdot\omega_{13}; \qquad \omega_{13} = p\omega_{01} + q\omega_{02}; \ \omega_{03} = 0 \\ &\omega_{32} = \alpha\cdot\varsigma\cdot\omega_{02}; \quad \omega_{20} = \gamma\cdot\omega_{13} + \alpha\cdot\omega_{23}; \ \omega_{23} = q\omega_{01} + r\omega_{02}; \ \omega_{30} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

3. Из четырех вершин тетраэдра T вершина A_2 не определена геометрически; при выборе ее на луче l' рассмотрим два случая:

a) луч A_0A_1 не касается асимптотической линии поверхности A_0,

b) луч A_0A_1 касается асимптотической линии поверхности A_0.

Случай 1. Выберем A_2 так, чтобы A_0A_1 и A_0A_2 гармонически отделялись касательными к асимптотическим линиям поверхности A_0.

В этом случае $q = 0$.

Нормируем далее координаты вершин.

Заменяем A_0, A_1, A_2, A_3 соответственно через $\lambda_0\tilde{A}_0, \lambda_1\tilde{A}_1, \lambda_2\tilde{A}_2, \lambda_3\tilde{A}_3$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} &\omega_{ij} = \tilde{\omega}_{ij}\cdot\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \\ \text{и} \\ &\omega_{kk} = \tilde{\omega}_{kk} + \frac{\alpha\lambda_k}{\lambda_k} \end{aligned}\right\}, \tag{10}$$

где $\tilde{\omega}_{ik}$—формы, соответствующие точкам $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3$.

Выберем λ_j так, чтобы

$$\alpha\,\frac{\lambda_0}{\lambda_3} = 1; \quad \gamma\,\frac{\lambda_0\lambda_1}{\lambda_2\lambda_3} = 1; \quad p\,\frac{\lambda_0\lambda_3}{\lambda_1^2} = 1$$

и

$$\tilde{\omega}_{00} + \tilde{\omega}_{11} + \tilde{\omega}_{22} + \tilde{\omega}_{33} = 0.$$

Система уравнений (9) преобразуется в следующую

$$\tilde{\omega}_{31} = \varsigma\cdot\tilde{\omega}_{01} - \varsigma\tilde{\omega}_{02}; \quad \tilde{\omega}_{10} = \tilde{\omega}_{13}; \qquad \tilde{\omega}_{13} = \tilde{\omega}_{01}.$$
$$\tilde{\omega}_{32} = \varsigma\cdot\tilde{\omega}_{02}; \qquad \tilde{\omega}_{20} = \tilde{\omega}_{13} + \tilde{\omega}_{23}; \quad \tilde{\omega}_{23} = r\tilde{\omega}_{02}.$$

Нетрудно видеть, что решение в этом случае зависит от 1 функции двух аргументов.

Случай 2. Выберем A_2 так, чтобы луч A_0A_2 касался асимптотической линии второго семейства поверхности A_0; в этом случае

$$p = r = 0.$$

После нормирования система уравнений (9) принимает вид:

$$\tilde{\omega}_{31} = \varsigma \cdot \tilde{\omega}_{01} - \varsigma\tilde{\omega}_{02}; \quad \tilde{\omega}_{10} = \tilde{\omega}_{13}; \quad \tilde{\omega}_{13} = \tilde{\omega}_{02}.$$
$$\tilde{\omega}_{32} = \varsigma \cdot \tilde{\omega}_{02}; \quad \tilde{\omega}_{20} = \tilde{\omega}_{13} + \tilde{\omega}_{23}; \quad \tilde{\omega}_{23} = \tilde{\omega}_{01}.$$

Решение этой системы зависит от 6 функций одного аргумента.

4. Отметим следующие свойства таких пар конгруэнций:

1) конгруэнция A_0A_3 — параболического типа,

2) если конгруэнция L—параболического типа, то и L'—параболического типа,

3) касательная плоскость в точке Φ фокальной поверхности конгруэнции L проходит через фокус A_1 конгруэнции L',

4) если потребуем, чтобы касательная плоскость в A_1 к фокальной поверхности конгруэнции L' содержала фокус Φ, то пара конгруэнций (L, L') будет расслояема в двух направлениях,

5) фокусы Φ, P, Q лучей конгруэнций A_0A_3, A_0A_1, A_3A_1 находятся на одной прямой.

В случае 2-м конгруэнции A_0A_1 и A_3A_1—параболического типа; фокусы P и Q совпадают соответственно с точками A_0 и A_3.

Механико-математический факультет
Московского государственного
университета.

Поступило
2 XI 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Бахвалов, ДАН, I, 5 (1936).