Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 1

ФИЗИКА

Д. ИВАНЕНКО и А. СОКОЛОВ

ОБОБЩЕННОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ И КЛАССИЧЕСКАЯ МЕЗОДИНАМИКА

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 17 XI 1939)

1. n-мерное уравнение Даламбера-Шредингера. Каждая компонента φ мезонного поля в отсутствии электромагнитных сил подчиняется релятивистскому уравнению Шредингера

$$\Box\varphi - k_0^2\varphi = -\rho(x), \tag{1}$$

где $x = x_1, x_2, x_3, ict$, $k_0 = \frac{mc}{h}$ и $\rho(x)$ обозначает плотность «нуклонов»* (нейтронов-протонов), являющихся источниками мезонного поля.

В статическом случае имеем:

$$\triangle\varphi - k_0^2\varphi = -\rho(x). \tag{2}$$

Ввиду важности подобных уравнений представляет интерес исследовать их решения для выражений более общего класса, именно для случая n-измерений:

$$\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_s^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_t^2} - k_0^2\varphi = -\rho(x) \quad (x_t = ict,\ n \geqslant 3). \tag{3}$$

Решение (3) ищем в виде

$$\varphi(x) = \int (dx')_{n-1}\, dx'_t\, \rho(x')\, G_n(xx'), \tag{4}$$

причем гриновскую функцию G_n мы находим из условия

$$\left(\sum_{s=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_s^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_t^2} - k_0^2\right) G_n(xx') = -\delta(x - x'), \tag{5}$$

и $\rho(x)$ принимается убывающим на бесконечности столь быстро, что поверхностные интегралы исчезают.

---

* Термин предложен Бельинфанте.

Из (5) следует

$$\left.\begin{aligned} G_n(xx') = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\frac{(dk)_{n-1}\,dk_t}{k^2+k_t^2+k_0^2}\,e^{i\left(\sum\limits_{s=1}^{n-1}k_s u_s + k_t u_t\right)} \\ \left(u_s = x_s - x_s',\quad u_t = x_t - x_t',\quad k^2 = \sum_{s=1}^{n-1} k_s^2\right). \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Вычисляя интеграл (6), найдем:

$$G_n = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{k_0}{2\pi R}\right)^{\frac{n}{2}-1} K_{\frac{n}{2}-1}(k_0 R); \quad (7)$$

при $k_0 = 0$ получим гриновскую функцию n-мерного уравнения Даламбера:

$$\left.\begin{aligned} G_n^0 = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{n}{2}} R^{n-2}} \\ \left(R^2 = r^2 + u_t^2,\quad r^2 = \sum_{s=1}^{n-1} u_s^2\right). \end{aligned}\right\} \quad (7а)$$

При $n=3$ получаем потенциал Юкава для ядерных сил

$$G_3 = \frac{e^{-k_0 R}}{4\pi R}, \quad (8)$$

переходящий при $k_0 = 0$ в потенциал Кулона.

При $n = 4$ находим гриновскую функцию уравнения Прока (1), найденную впервые одним из нас ([1]):

$$G_4 = \frac{k_0}{(2\pi)^2 R} K_1(k_0 R). \quad (9)$$

Полагая $k_0 = 0$, из (9) получаем потенциал Херглотца:

$$G_4^0 = \frac{1}{4\pi^2 R^2}. \quad (9а)$$

Ядерный потенциал Юкава (8) получается после интегрирования (9) по x_t' (1), что вполне аналогично выводу кулонова закона из потенциала Херглотца ([2]).

2. Принцип Гюйгенса. Как известно, решение уравнения Даламбера ($n = 4$, $k_0 = 0$) допускает интеграцию по временной координате x_t при заданном $\rho(x)$, что приводит к запаздывающим или опережающим потенциалам. Это соответствует выполнению принципа Гюйгенса (П. Г.).

Проделаем аналогичные преобразования в общем случае.

Полагая $x_t - x_t' = ict_1$ и учитывая (7), мы сведем интеграцию по x_t' в (4) к интеграции по берегам разреза вдоль вещественной оси от $\frac{r}{c} + \varepsilon$ до ∞ и обходу по окружности радиуса $\varepsilon \to 0$ вокруг точки $\frac{r}{c}$; тогда получим:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \int (dx')_{n-1}\, ic\Biggl\{\int\limits_{\frac{r}{c}+\varepsilon}^{\infty} dt_1 \bigl[G_n\bigl(i\sqrt{c^2 t_1^2 - r^2}\bigr) - \\ - G_n\bigl(-i\sqrt{c^2 t_1^2 - r^2}\bigr)\bigr]\rho(x_{n-1}', t - t_1) + \\ \oint\limits_{\varepsilon} dt_1 G_n\bigl(-i\sqrt{c^2 t_1^2 - r^2}\bigr)\rho(x_{n-1}', t - t_1)\Biggr\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя в (10) разложение K через бесселевы функции, видим, что исчезновение интегралов по берегам, являющееся необходимым условием для выполнения П. Г., имеет место только при $k_0=0$ и для четных измерений. Кроме того в последнем случае остающийся интеграл по кругу приводит к замене в функции ρ и ее производных t_1 на $\pm\frac{r}{c}$, т. е. к выполнению П. Г. Невыполнение П. Г. при $k_0\neq0$ оказывается совершенно понятным с физической точки зрения, так как при неисчезающей массе частиц, переносящих сигналы, кроме фронта, распространяющегося со скоростью света, всегда будет иметься «хвост» частиц, движущихся с любыми скоростями — от нуля до скорости света*. Эти последние частицы будут переносить сведения о предыдущей истории источника вплоть до $t'=-\infty$.

Что касается невыполнения П. Г. в нечетном числе измерений даже при $k_0=0$, то причину этого можно искать в возможности сведения одного из измерений к наличию члена со всевозможными массами.

Тем самым мы получаем физическое объяснение причин невыполнения П. Г. для уравнений типа Даламбера-Шредингера, что являлось предметом исследования Адамара и других математиков для уравнений близкого типа.

3. Случай уравнений Прока. Обратимся к рассмотрению случая $n=4$. Гриновская функция принимает вид:

$$G_4=G_4^0+G_4^1+G_4^2, \tag{11}$$

причем

$$G_4^0=\frac{1}{4\pi^2R^2}, \tag{12}$$

$$G_4^1=\frac{k_0}{4\pi^2R}I_1(k_0R)\log\frac{k_0R}{2}, \tag{12a}$$

$$G_4^2=k_0^2\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(k_0R)^{2\nu} \tag{12b}$$

(a_ν — некоторые постоянные коэффициенты).

При интегрировании по кругу и берегам G_4^2 дает нуль. Интеграция части (12a) по кругу дает нуль, а по берегам приводит к выражению

$$-\frac{k_0}{4\pi}\int(dx')_3\,c\int_{\frac{r}{c}}^{\infty}dt_1\rho(x_3',\,t-t_1)\frac{J_1\left(k_0\sqrt{c^2t_1^2-r^2}\right)}{\sqrt{c^2t_1^2-r^2}},$$

которое для точечного источника заряда $4\pi g$, движущегося произвольным образом, когда x_s' и ct' являются функцией собственного времени τ, переходит в

$$-gk_0\int_{-\infty}^{\tau_0}d\tau\,\frac{\dot{x}_\nu'}{s}J_1(k_0s). \tag{13}$$

Здесь $s^2=c^2(t-t')^2-\sum_{s=1}^{3}(x_s-x_s')^2$ и τ_0 определяется из условия $t-t'=\frac{r}{c}$.

---

* В выяснении этого вопроса в мае 1939 г. принимал участие В. Е. Рудницкий.

Член (12) при интегрировании по берегам дает нуль, а по кругу, как и в случае Херглотца, даст выражение:

$$\int \frac{(dx')_3\, \rho\left(x'_3,\, t-\frac{r}{c}\right)}{4\pi r},$$

которое в случае точечного заряда $4\pi g$ переходит в потенциал Льенара Вихерта, который был получен Бабой ([3]) другим путем.

Различный выбор временной координаты: $x_t=ct$ у Бабы и $x_t=ict$ в нашем случае приводят к двум видам гриновской функции, которые, однако, как мы показали, сводятся друг к другу.

Наше выражение для $G_4^0=\frac{1}{4\pi^2R^2}$ заменяется в случае Бабы через $\delta\left(t_1^2-\frac{r^2}{c^2}\right)$, что указывает на аналогию между оператором формулы Коши (в теории комплексных переменных) и δ-функцией Дирака.

Полное выражение для потенциала движущегося заряда e или g по Дираку ([3]) лежит в основе нового способа получения уравнений движения электрона или «нуклона». Подобные уравнения движения для всевозможных полей (псевдо)скалярного, (псевдо)векторного типа могут быть исследованы единым методом, приводя к наиболее простым результатам в случае векторного мезонного поля Прока, описываемого антисимметрическим тензором, а также в других случаях при $k_0=0$. Даже в простейшем случае скалярного поля, подчиняющегося уравнению Даламбера, уравнения движения содержат характерные члены, отмеченные Дираком:

$$m\dot{v}_\mu-\frac{g^2}{3}\ddot{v}_\mu-\frac{g^2}{3}\dot{v}^2v_\mu=-g\frac{\partial\psi in}{\partial x^\mu}. \tag{14}$$

Однако согласно Эйнштейну и Громмеру ([4]) уравнения движения могут быть получены только из нелинейной теории поля. Поэтому возникает необходимость исследования различия обоих методов как в случае теории Максвелла и ее нелинейных обобщений (Борн-Инфельд, вакуум Дирака) и в случае гравитационного поля, так и в случае уравнений Прока и их возможных нелинейных обобщений ([5]).

Университет
Свердловск

Поступило
14 XI 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] D. Iwanenko, Nature, **144**, 77 (1939). [2] Я. Френкель, Электродинамика, т. I, стр. 194 (1934). [3] H. J. Bhabha, Proc. Roy. Soc. (A), **172**, 384 (1939). [4] A. Einstein u. J. Grommer, Berl. Ber. (1927). [5] Д. Иваненко и В. Родичев, ЖЭТФ, **9**, 526 (1939).