Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

ЛИНЕЙНЫЕ ЗАКОНЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ НЕ ВПОЛНЕ УПРУГИХ ТЕЛ

(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 1 XI 1939)

Многие материалы, находящие применение в практике, не вполне упруги. Известно, например, свойство тел изменять напряженное состояние при неизменной деформации. Это свойство, именуемое релаксацией, описывалось еще Максвеллом (1), предложившим уравнение:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \nu\sigma + \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt}$$

для математического описания этого явления. Здесь ε — деформация, σ — напряжение, ν и E — физические константы.

Известно также свойство тел изменять деформированное состояние при неизменном напряженном состоянии. Это свойство, именуемое последействием, описывалось, например, Томпсоном (2) посредством уравнения:

$$\sigma = E\varepsilon + \mu\frac{d\varepsilon}{dt},$$

где E и μ — физические константы.

Вольтерра описал оба явления посредством одного интегрального уравнения:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E}\sigma(t) + \int_{-\infty}^{t} \varphi(t, \tau)\,\sigma(\tau)\,d\tau,$$

где $\varphi(t, \tau)$ — некоторая функция, именуемая «функцией наследственности».

Представляется, однако, возможным описать эти явления посредством линейного дифференциального соотношения:

$$\frac{d\sigma}{dt} + r\sigma = b\frac{d\varepsilon}{dt} + bn\varepsilon,$$

представляющего обобщение максвеллового уравнения. Действительно, при $\varepsilon = \varepsilon_1 = \text{const}$ получим:

$$\sigma = \frac{bn\varepsilon_1}{r} + Ce^{-rt}$$

и r представляет собой коэффициент скорости релаксации, а при $\sigma = \sigma_1 = \text{const}$ имеем:

$$\varepsilon = \frac{r\sigma_1}{bn} + De^{-nt}$$

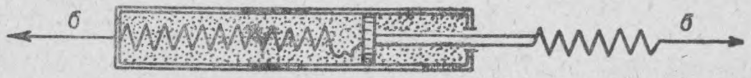
и n представляет собой коэффициент скорости последействия. Физическая константа b в этом обобщенном уравнении Максвелла представляет собой модуль упругости при быстрых деформированиях стержня.

Математически это дифференциальное соотношение эквивалентно интегральному уравнению Вольтерра с ядром

$$\frac{r-n}{b}e^{-n(t-\tau)} \quad \text{и резольвентой} \quad -b(r-n)e^{-r(t-\tau)},$$

поэтому все результаты теории наследственности Вольтерра распространяются на материалы, подчиняющиеся обобщенному уравнению Максвелла.

Если представить себе модель, состоящую из цилиндра, дно которого пружиной жесткости c соединено с поршнем, имеющим отверстия,



Фиг. 1.

через которые может проходить вязкая жидкость, наполняющая цилиндр, и, кроме того, с поршнем соединена пружина жесткости b, выходящая наружу из цилиндра, то деформирование этой модели подчиняется обобщенному уравнению Максвелла, причем следует положить:

$$r=\frac{b+c}{\mu}, \quad n=\frac{c}{\mu},$$

где μ — коэффициент вязкого сопротивления движению поршня. Уравнение продольных колебаний стержня, материал которого следует обобщенному уравнению Максвелла, получается путем исключения функций σ и ε из соотношений:

$$\varepsilon=\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x}(F\sigma)=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial\sigma}{\partial t}+r\sigma=b\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+bn\varepsilon.$$

В случае постоянного сечения F и однородного материала получим для перемещения u уравнение

$$\rho\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+\rho r\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=b\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+bn\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Решение этого уравнения единственно, если $r>n$. Действительно, пусть $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ два решения, удовлетворяющие одним и тем же начальным значениям u, $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Тогда $u=u_1-u_2$ тоже решение, но удовлетворяющее начальным условиям:

$$\text{при} \quad t=0, \quad u=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0.$$

Рассмотрим интеграл

$$W=\int_0^l\left\{\frac{\sigma^2}{2b}+\frac{nb}{2(r-n)}\left(\varepsilon-\frac{\sigma}{b}\right)^2+\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right\}dx.$$

Если считать для определенности концы стержня заделанными упруго, т. е. принять

$$\text{при} \quad x=0 \quad \sigma_1=f_1(u_1) \quad \text{и при} \quad x=l \quad \sigma_2=f_2(u_2),$$

где $f_1(u)$ и $f_2(u)$ — монотонно возрастающие функции, то, дифференцируя выражение W по времени и пользуясь вышеприведенными соотношениями, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^l\left[\frac{\sigma^2}{2b}+\frac{nb}{2(r-n)}\left(\varepsilon-\frac{\sigma}{b}\right)^2+\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]dx+\right.$$

$$\left.+\int_0^{u_1}f(u_1)\,du_1+\int_0^{u_2}f(u_2)\,du_2\right\}=-\int_0^l\frac{(r\sigma-nb\varepsilon)^2}{b(r-n)}dx\leqslant 0.$$

Так как в начальный момент времени $t=0$ интегралы, стоящие в левой части равенства, равны нулю, а стать отрицательными они не могут, то для любого момента $t>0$ должно быть:

$$\sigma=0,\quad \varepsilon=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}=0,\quad u_1=0,\quad u_2=0$$

и, следовательно,

$$u(x,\,t)\equiv 0.$$

Заметим, что первые два члена подинтегрального выражения W представляют выражение потенциальной энергии описанной выше модели, для которой выполняется также условие $r>n$.

Для отыскания собственных колебаний стержня можно применить обычную методу Фурье и положить:

$$u(x,\,t)=\chi(x)\,\tau(t),$$

после чего придем к уравнениям:

$$\frac{d^2\chi}{dx^2}+a^2\chi=0,$$

$$\rho\frac{d^3\tau}{dt^3}+r\rho\frac{d^2\tau}{dt^2}+a^2\left(b\frac{d\tau}{dt}+bn\tau\right)=0.$$

Граничные условия закрепления стержня позволяют найти спектр значений величины a, например в случае жесткой заделки:

$$al=m\pi,\quad m=1,\,2,\,\ldots$$

Характеристическое уравнение второго дифференциального уравнения имеет вид:

$$\lambda^3+r\lambda^2+\mu(\lambda+n)=0,$$

где $\mu=\dfrac{a^2b}{\rho}$.

Корни этого уравнения при любых значениях a и, следовательно μ, либо отрицательны, либо имеется один отрицательный и два комлексных корня. В последнем случае, пользуясь теоремами Вьетта, можно показать, что действительная часть комплексных корней при условии $r>n$ будет непременно отрицательной, т. е. колебания стержня затухают. Что же касается случая трех отрицательных корней, то, не останавливаясь на подробном выяснении условий существования этого случая, укажем, что он возможен при условии:

$$n<\frac{r}{9}\quad \text{и}\quad 0<\mu<\frac{r^2}{3}.$$

При этом может случиться, что для первых значений спектра величины a будет иметь место случай одного отрицательного и двух комплексных корней, т. е. случай колебаний, затем для нескольких следующих значений a — случай трех отрицательных корней, т. е. случай апериодического движения, и, наконец, для всех следующих возрастающих значений a вновь появится случай колебаний.

Решение, удовлетворяющее начальным условиям Коши, строится, как обычно, в виде бесконечной суммы частных решений. Получающиеся при этом ряды сходятся.

Можно получить частное решение уравнения колебаний для бесконечно длинного стержня в виде:

$$u = Ce^{ipt+i(c+if)x},$$

представляющего затухающую волну длиной $\frac{2\pi}{c}$, движущуюся со скоростью $\frac{p}{c}$. Величины c и f определяются равенствами:

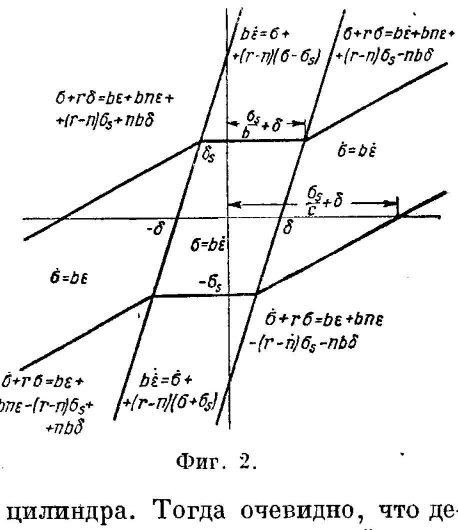
$$f = \pm\sqrt{s - \sqrt{s^2+q^2}}, \qquad c = \pm\sqrt{s + \sqrt{s^2+q^2}},$$

где

$$2s = \frac{\rho}{b}\,\frac{p^2(p^2+rn)}{n^2+p^2}, \qquad 2q = \frac{\rho}{b}\,\frac{p^3(r-n)}{n^2+p^2}.$$

Таким образом скорость распространения волны зависит от ее частоты, т. е. имеет место дисперсия волн. Если частота весьма мала, то скорость распространения волны, независимо от частоты, стремится к предельному значению $\sqrt{\frac{bn}{\rho r}}$, а затухание имеет порядок p^2. Точно также, если частота весьма велика, то скорость распространения волны, независимо от частоты, стремится к значению $\sqrt{\frac{b}{\rho}}$, а затухание f к постоянной $\frac{(r-n)^2}{4b}$.

Предложенное выше обобщение уравнения Максвелла, равно как и интегральное уравнение Вольтерра, показывают на наличие явления релаксации и явления последействия при любой деформации и любом напряжении, в то время как эксперимент обнаруживает эти явления, главным образом, при напряжениях, превышающих предел упругости.



Фиг. 2.

Нетрудно провести дальнейшее обобщение уравнения Максвелла, устраняющее этот недостаток и описывающее явление наклепа — повышение предела упругости при повторном растяжении, если при первом растяжении стержня предел упругости был превзойден.

Для большей наглядности обратимся вновь к механической модели, описанной выше, усложнив ее кулоновым трением σ_s поршня о стенки цилиндра. Тогда очевидно, что деформация модели будет чисто упругой, если разность натяжений внешней и внутренней пружины будет по абсолютной величине менее значения σ_s. Уравнение деформирования модели примет при этом усложнении вид:

$$\dot\sigma = b\dot\varepsilon \quad \text{при} \quad |r\sigma - nb\varepsilon| < (r-n)\sigma_s,$$

$$\dot\sigma + r\sigma = b\dot\varepsilon + bn\varepsilon - (r-n)\sigma_s \operatorname{sign}(r\sigma - nb\varepsilon).$$

Наконец, возможно описание явления текучести материала при растяжении. Соответствующие уравнения имеют вид:

$$\dot{\sigma} = b\dot{\varepsilon} \quad \text{при} \quad |\sigma| \leqslant \sigma_s, \quad \text{если} \quad \left|\varepsilon - \frac{\sigma}{b}\right| \leqslant \delta, \quad \text{и при} \quad |r\sigma - nb\varepsilon \mp nb\delta| \leqslant \sigma_s,$$

$$b\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} + (r-n)[\sigma - \sigma_s \operatorname{sign}(\sigma)] \quad \text{при} \quad |\sigma| \geqslant \sigma_s, \quad \text{но} \quad \left|\varepsilon - \frac{\sigma}{b}\right| \leqslant \delta,$$

$$\dot{\sigma} + r\sigma = b\dot{\varepsilon} + bn\varepsilon - bn\delta \operatorname{sign}\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{b}\right) - (r-n)\sigma_s \operatorname{sign}(r\sigma - nb\varepsilon) \quad \text{при}$$

$$\left|\varepsilon - \frac{\sigma}{b}\right| > \delta \quad \text{и} \quad |r\sigma - nb\varepsilon \mp nb\delta| \geqslant \sigma_s,$$

где δ — длина площадки текучести на диаграмме зависимости между деформацией и удлинением при простом растяжении. Эти уравнения легко получить, изучая деформирование описанной выше модели, у которой сделано еще одно усложнение: внутренняя пружина соединена с поршнем не непосредственно, а нитью длиной 2δ (фиг. 1). На фиг. 2 изображена диаграмма областей значений σ и ε, в которых справедливо то или иное приведенное выше соотношение между $\dot{\sigma}$, σ, $\dot{\varepsilon}$ и ε.

Поступило
9 XI 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] I. C. Maxwell, Philos. Trans., London, **157** (1867). [2] J. H. C. Thompson, Philos. Trans., London, A, 231 (1933). [3] М. А. Исакович, ДАН, XXIII, № 8 (1939). [4] K. Hohenemser, ZS. f. angew. Math. und Mech., H. 6 (1931).