Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 1

МАТЕМАТИКА

М. КРЕЙН

О ПРОБЛЕМЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ ЭРМИТОВО ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 22 XI 1939)

1. Через $\mathfrak{P}_A$ $(0 < A \leqslant \infty)$ мы будем обозначать совокупность всех непрерывных функций, определенных в открытом интервале $(-A, A)$ и удовлетворяющих следующим двум условиям: 1) функция $f(x)$ является эрмитовой, т. е. $f(-x) = \bar{f}(x)$ $(-A < x < A)$; 2) каковы бы ни были числа $0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, эрмитова форма

$$\sum_{j,\,k=1}^{n} f(x_j - x_k)\, \xi_j \bar{\xi}_k \tag{1}$$

неотрицательна.

S. Bochner [1] впервые доказал, что класс функций $\mathfrak{P}_\infty$ совпадает с классом всех тех функций $F(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, которые допускают представление

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\sigma(t) \quad (-\infty < x < \infty), \tag{2}$$

где $\sigma(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ — некоторая неубывающая функция ограниченной вариации $(\sigma(\infty) - \sigma(-\infty) < \infty)$. Эта теорема допускает следующее обобщение:

Теорема 1. *Для того чтобы заданная в интервале $(-A, A)$ функция $f(x)$ допускала представление*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\sigma(t) \quad (-A < x < A), \tag{3}$$

где $\sigma(t)$ — некоторая неубывающая функция ограниченной вариации, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ принадлежала классу $\mathfrak{P}_A$.

Необходимость условия тривиальна. Идея доказательства его достаточности заключается в следующем.

Обозначим через L_A линейную совокупность всех функций $\varphi(t)$ вида

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ix_k t}, \tag{4}$$

где $-A < x_k < A$, а c_k — некоторые комплексные числа $(k = 1, 2, \ldots, n;$ $n = 1, 2, \ldots)$. Определим на пространстве L_A линейный (т. е. аддитивный и однородный) функционал $\Phi(\varphi)$, положив для $\varphi(t)$ вида (4)

$$\Phi(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} c_k f(x_k).$$

Без особого труда можно показать, что если $f(x) \in \mathfrak{P}_A$, то функционал $\Phi(\varphi)$ положителен, т. е. $\Phi(\varphi) \geqslant 0$ при $\varphi(t) \geqslant 0$ $(-\infty < t < \infty)$. Распространим тогда функционал $\Phi(\varphi)$ на все пространство L_∞, сохранив его положительность, а затем положим $F(x) = \Phi(e^{ixt})$ $(-\infty < x < \infty)$. Тогда $f(x) = F(x)$ при $-A < x < A$ и

$$\sum_{j,\,k=1}^{n} F(x_j - x_k)\,\xi_j\bar{\xi}_k = \Phi\left(\left|\sum_{j=1}^{n} \xi_j e^{ix_j t}\right|^2\right) \geqslant 0$$

при любых $x_j \in (-\infty, \infty)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Кроме того функция $F(x)$ непрерывна. Это вытекает из следующего общего замечания, которым автор обязан А. П. Артеменко.

Если функция $f(x)$ $(-A < x < A)$ непрерывна в точке 0 и эрмитово положительна в открытом интервале $(-A, A)$ [т. е. удовлетворяет условиям 1), 2)], то она равномерно непрерывна в этом интервале [это остроумное замечание легко получается из рассмотрения формы (1) при $n = 3$].

Таким образом $F(x) \in \mathfrak{P}_\infty$, а следовательно, допускает представление (2). Откуда $f(x)$ допускает представление (3).

Если $f(x) \in \mathfrak{P}_A$ $(0 < A < \infty)$, то существует $\lim\limits_{x \to A} f(x)$, поэтому без ограничения общности мы будем в дальнейшем считать, что каждая функция $f(x) \in \mathfrak{P}_A$ $(0 < A < \infty)$ определена в замкнутом интервале $(-A, A)$.

Неубывающие функции $\sigma(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ в представлении (3) мы будем всегда так нормировать, что

$$\sigma(-\infty) = 0, \quad \sigma(t) = \frac{\sigma(t-0) + \sigma(t+0)}{2} \quad (-\infty < t < \infty).$$

Совокупность всех нормированных функций $\sigma(t)$, дающих представление (3), обозначим через V_f. В зависимости от того, состоит ли V_f из одной или многих функций $\sigma(t)$, мы будем говорить, что проблема продолжения функции $f \in \mathfrak{P}_A$ определенна или неопределенна.

Дальнейшая часть нашей статьи посвящена решению вопроса, когда имеет место тот или иной случай [определенности или неопределенности проблемы продолжения функции $f(x) \in \mathfrak{P}_A$]. Построенная нами теория представляет удивительно много аналогий с классической проблемой моментов; ее результаты в отдельных своих частях напоминают результаты исследований Hamburger'a (2), R. Nevanlinna (3,4), M. Riesz'a (5,6) и H. Weyl'я (7) по проблеме моментов, проблеме Nevanlinna-Pick'a и теории дифференциальных уравнений. Однако наши методы во многих отношениях отличны от методов названных авторов.

2. Обозначим через $\mathfrak{B}_A$ совокупность всех целых комплексных функций $g(t)$, обладающих следующими двумя свойствами:

1) $\sup |g(t)| < \infty$ $\quad (-\infty < t < \infty)$;

2) $\overline{\lim\limits_{r \to \infty}}\, r^{-1} M(r) \leqslant A$ $\quad \left(M(r) = \max\limits_{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi} |g(re^{i\varphi})|\right)$,

а через $\mathfrak{B}_A^+$ — совокупность всех целых комплексных функций $g(t)$ таких, что $g(t)\, e^{i\frac{A}{2}t} \in \mathfrak{B}_A^+$. Очевидно, $\mathfrak{B}_A^+ \subset \mathfrak{B}_A$.

Из недавних исследований Б. М. Левитана (8) вытекает, что для каждой функции $g(t) \in \mathfrak{B}_A$ можно построить последовательность тригонометрических полиномов

$$T_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{i\frac{kA}{n}t},$$

ограниченных по модулю константой $C = \sup |g(t)|$ и сходящихся равномерно в каждом конечном интервале к функции $g(t)$. Из этого предложения непосредственно следует

Лемма 1. *Пусть* $g(t) \in \mathfrak{B}_A$, $f(x) \in \mathfrak{P}_A$, $\sigma(t) \in V_f$. *Тогда величина*

$$\Phi_f(g) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, d\sigma(t)$$

зависит только от f *и* g *и не зависит от* σ.

Таким образом, если $f \in \mathfrak{P}_A$ зафиксировать, то $\Phi_f(g)$ будет некоторым линейным и, очевидно, положительным функционалом, определенным на $\mathfrak{B}_A$. Нам понадобится также следующая лемма:

Лемма 2. *Если* $g(t) \in \mathfrak{B}_A$, $Iz_k > 0$, $c_k = a_k + ib_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ *и функция*

$$\varphi(t) = g(t) + \Re\left\{ \sum_1^n \frac{c_k}{t - z_k} \right\} \geqslant 0,$$

то существует такая функция $P(t) \in \mathfrak{B}_A^+$ *и такие константы* $\gamma_k = \alpha_k + i\beta_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, *что*

$$\varphi(t) = \left| P(t) + \sum_1^n \frac{\gamma_k}{t - z_k} \right|^2.$$

При этом выражение, стоящее под знаком модуля, можно так построить, чтобы его нули лежали в одной полуплоскости $Iz \geqslant 0$. При $c_k = 0$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ очевидно $\gamma_k = 0$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, и это предложение следует рассматривать как обобщение известной теоремы Feyer'a-Riesz'a (9) о неотрицательных полиномах.

Условимся относить к каждой функции $\sigma(t) \in V_f$ аналитическую функцию $w_0(z)$ $(Iz > 0)$, определяемую равенством

$$w_\sigma(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t - z}.$$

Проблема продолжения функции $f \in \mathfrak{P}_A$ является, очевидно, определенной тогда и только тогда, когда $w_\sigma(z)$ не зависит от $\sigma \in V_f$.

Теорема 2. *Проблема продолжения функции* $f(x) \in \mathfrak{P}_A$ *является определенной, если существует какая-либо неотрицательная функция* $g(t) \in \mathfrak{B}_A$ $(g(t) \not\equiv 0)$, *для которой* $\Phi_f(g) = 0$.

Действительно, согласно лемме 2 $g(t) = |P(t)|^2$, где $P(t) \in \mathfrak{B}_A^+$. Поэтому, если положить

$$Q(z) = \Phi_f\left(\frac{P(t) - P(z)}{t - z}\right) \quad (Iz > 0),$$

то при $\sigma(t) \in V_f$, в силу неравенства Шварца,

$$|P(z)\, w_\sigma(z) + Q(z)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{t - z} d\sigma(t) \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |P(t)|^2 d\sigma(t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{t - z} \right|^2 d\sigma(t) = 0.$$

Следовательно, $w_\sigma(z) = -\frac{Q}{P}$ не зависит от $\sigma(t)$.

3. В силу теоремы 2 мы можем в дальнейшем ограничиться рассмотрением только несингулярного случая, когда при любом $P(t) \in \mathfrak{B}_A^+$ $(P(t) \not\equiv 0)$ выполняется условие $\Phi_f(|P(t)|^2) > 0$.

Определим тогда в $\mathfrak{B}_A^+$ скалярное произведение двух элементов $P, Q \in \mathfrak{B}_A^+$ равенством $(P, Q) = \Phi_f(P(t)\overline{Q}(t))$.

Легко видеть, что тогда $\mathfrak{B}_A^+$ обратится в некоторое пространство, обладающее всеми основными свойствами пространства Гильберта, кроме свойства метрической полноты. Пусть $\{D_k(t)\}_1^\infty$ — некоторая замкнутая фотонормированная система функций из $\mathfrak{B}_A^+$; положим

$$E_k(z) = \Phi_{f_-}\left\{ \frac{D_k(t) - D_k(z)}{t - z} \right\}.$$

С помощью леммы 2 и некоторых соображений функционального характера можно доказать следующую теорему:

Теорема 3. *Пусть z ($Iz > 0$) — некоторая произвольно фиксированная точка комплексной плоскости. Тогда совокупность всех возможных значений $w_\sigma(z)$ ($\sigma(t) \in V_f$) совпадает с замкнутым кругом $C(z)$ в плоскости w, который можно задать неравенством* *

$$\frac{w - \overline{w}}{z - \overline{z}} = \sum_{k=1}^{\infty} | w\overline{D}_k(z) + \overline{E}_k(z)|^2.$$

Этот круг может свестись к точке. Если для какого-нибудь z круг $C(z)$ сводится к точке, то это имеет место для всякого иного z. В этом и только в этом случае проблема продолжения функции $f(x) \in \mathfrak{P}_A$ является определенной.

После этого можно установить также следующие теоремы:

Теорема 4. *Для того чтобы проблема продолжения функции $f(x) \in \mathfrak{P}_A$ была неопределенной, необходимо и достаточно, чтобы ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\overline{D}_k(z)|^2 \qquad (5)$$

сходился равномерно в каждой конечной части плоскости z.

При выполнении этого условия сумма ряда (5) для $Iz = y \geqslant 0$ является монотонно возрастающей функцией от y. Кроме того будет также сходиться и притом равномерно в каждой конечной области ряд $\sum_1^\infty |\overline{E}_k(z)|^2$. Положим для этого случая:

$$U_1(z) = 1 - z\sum_1^\infty \overline{D}_k(z) E_k(0), \quad U_2(z) = -z\sum_1^\infty \overline{D}_k(z) D_k(0),$$

$$V_1(z) = z\sum_1^\infty \overline{E}_k(z) E_k(0), \quad V_2(z) = 1 + z\sum_1^\infty \overline{E}_k(z) D_k(0).$$

Функции $U_i(z)$ и $V_i(z)$ ($i = 1, 2$), очевидно, являются целыми функциями.

Теорема 5. *Если проблема продолжения функции $f \in \mathfrak{P}_A$ является неопределенной, то:* 1) *уравнение*

$$w = \frac{V_1(z) + tV_2(z)}{U_1(z) + tU_2(z)} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

---

* Если $\varphi(z) = c_0 + c_1 z + \ldots$, то мы полагаем $\overline{\varphi}(z) = \overline{c}_0 + \overline{c}_1 z + \ldots$

является параметрическим уравнением границы окружности $C(z)$; 2) общий вид аналитической функции $w_\sigma(z)$ $(Iz > 0)$ получается по формуле:

$$w(z) = \frac{V_1(z) + \tau(z) V_2(z)}{U_1(z) + \tau(z) U_2(z)},$$

где $\tau(z)$ — произвольная регулярная в верхней полуплоскости функция, удовлетворяющая там условию $I\tau(z) \geqslant 0$.

4. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^A f(x-y)\varphi(y)\,dy \quad (f \in \mathfrak{P}_A).$$

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — его полная ортонормированная система фундаментальных функций, а $\{\lambda_n\}$ — соответствующая последовательность характеристических чисел.

Соединяя теоремы 2 и 4, можно получить следующий, во многих случаях практически удобный критерий:

Теорема 6. *Для того чтобы проблема продолжения функции $f \in \mathfrak{P}_A$ была неопределенной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись две условия:*

1) *для любой функции*

$$\tau(x) = \frac{\tau(x+0) + \tau(x-0)}{2} \not\equiv \text{const} \quad (0 \leqslant x \leqslant A)$$

ограниченной вариации

$$\int_0^A \int_0^A f(x-y)\,d\tau(x)\,d\tau(y) > 0;$$

2) *ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left| \int_0^A e^{ixt}\varphi_n(x)\,dx \right|^2 < \infty$$

сходится при любом t $(-\infty < t < \infty)$.

Функция $f(x) = 1 - |x|$ $(|x| \leqslant A)$ входит в $\mathfrak{P}_A$ тогда и только тогда, если $0 < A \leqslant 2$. В силу теоремы 6 при $0 < A < 2$ проблема продолжения будет неопределенной, а при $A = 2$ будет определенной, и представление

$$1 - |x| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2n-1)^2} \cos\frac{(2n-1)\pi}{2} x \quad (-2 \leqslant x \leqslant 2)$$

будет единственным представлением типа (3) функции $1 - |x|$ в интервале $(-2, 2)$.

Институт математики и механики при
Государственном университете
Харьков

Поступило
22 XI 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Bochner, Fouriersche Integrale, Leipzig (1932). [2] H. Hamburger, Math. Annalen, **81**, **82** (1920—1921) (три статьи). [3] R. Nevanlinna, Annales Academiae Scientiarum Fennicae, ser. A, 18 (1922). [4] R. Nevanlinna, Ibid., **32** (1929). [5] M. Riesz, Arkif för Matematik, Astronomi och Fysik, **16**, **17** (1921, 1922, 1923) (три статьи). [6] M. Riesz, Acta Szeged, I, Fasc. 4 (1923). [7] H. Weyl, Annals of Mathematics, **36**, № 1 (1935). [8] Б. Левитан, ДАН, XV, № 4 (1937). [9] Polya u. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze, Berlin, **19**, S. 274—275 (есть русский перевод).