Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 1

МАТЕМАТИКА

В. Л. ШМУЛЬЯН

О МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛАХ В НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ НОРМИРОВАННЫХ КОЛЬЦАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 23 XI 1939)

Настоящая заметка примыкает к недавним исследованиям G. Birkhoff'a (1), И. М. Гельфанда и А. Н. Колмогорова (2), И. М. Гельфанда (3) и Г. Е. Шилова (4).

В теории абстрактных нормированных колец, построенных И. М. Гельфандом (3), большую роль играют линейные функционалы (которые мы называем мультипликативными), обладающие тем свойством, что значение функционала от произведения равно произведению значений функционала от сомножителей.

Здесь мы находим общий вид мультипликативного линейного функционала в специальных кольцах.

§ 1. Пусть Q обозначает произвольное абстрактное множество элементов $\{q\}$. Через $\mathfrak{M}$ обозначим произвольное семейство множеств $e \subset Q$, для которых выполняются следующие четыре условия: a) если $e_1, e_2 \in \mathfrak{M}$, то и $e_1 \cdot e_2 \in \mathfrak{M}$; b) если $e_1 \in \mathfrak{M}$, то и всякое множество $e_2 \subset Q$, содержащее e_1, тоже принадлежит $\mathfrak{M}$; c) пустое множество не принадлежит $\mathfrak{M}$; d) всякое множество $e \subset Q$, не попавшее в систему $\mathfrak{M}$, является дополнением к некоторому множеству из $\mathfrak{M}$.

Пример такого семейства $\mathfrak{M}$ легко привести. Действительно, обозначим через q_0 произвольную точку совокупности Q. К системе $\mathfrak{M}$ отнесем все множества $e \subset Q$, содержащие точку q_0. Очевидно, что полученная система множества удовлетворяет условиям a), b), c) и d).

Укажем теперь трансфинитный способ построения всех семейств $\mathfrak{M}$. Для этого вполне упорядочим семейство всех непустых множеств $e \subset Q$. Таким образом мы получаем некоторую трансфинитную последовательность

$$e_1, e_2, \ldots, e_\xi, \ldots \qquad (\xi < \xi_0), \tag{1}$$

состоящую из всех непустых множеств $e \subset Q$.

Возьмем теперь два множества: e_1 и его дополнение $(Q - e_1)$. Одно из них, отличное от пустого, обозначим через $e(1)$. Тогда $e(1)$, вместе со всеми множествами $e \subset Q$), содержащими его, образует некоторую систему M_1, обладающую свойствами a), b) и c). Через N_1 обозначим совокупность всех тех множеств, дополнения которых принадлежат M_1. Объединение двух систем M_1 и N_1 образует некоторую новую систему S_1. Система S_1 содержит множества e_1 и $(Q - e_1)$. Обозначим через e_{ξ_2} множество ряда (1), которое имеет наименьший индекс и не принадлежит S_1.

Тогда одно из двух множеств e_{ξ_2}, $(Q - e_{\xi_2})$ обозначим через $e(2)$. Множество $e(2)$ пересекается с каждым множеством из M_1. Через M_2 мы обозначим тогда совокупность всех множеств

$$e' \cdot [e(2) + e'', \qquad (2)$$

где $e' \in M_1$, а $e'' \subset Q$. Система M_2 обладает свойствами a), b), c) и содержит систему M_1. Через N_2 мы обозначим систему всех тех множеств, дополнения которых принадлежат M_2. Объединение двух систем M_2 и N_2 образует некоторую новую систему S_2, содержащую S_1. Множества $e_1, \ldots, e_{\xi_2}$, так же как и их дополнения, принадлежат S_2. Продолжая этот процесс трансфинитно, мы получим такие три системы M, N и S, что система $\mathfrak{M} \equiv M$ имеет свойства a), b), c) и d).

Из способа построения системы M ясно, что каждая система $\mathfrak{M}$, обладающая свойствами a), b), c) и d), может быть получена таким образом.

Семейства $\mathfrak{M}$ дают возможность строить аддитивные функции $\Phi(e)$ от множеств $e \subset Q$, которые принимают только два значения 0 и 1.

Действительно, пусть

$$\Phi(e) = \begin{cases} 1 & (e \in \mathfrak{M}) \\ 0 & (e \,\overline{\in}\, \mathfrak{M}) \end{cases}$$

Тогда из свойств семейства $\mathfrak{M}$ сразу следует аддитивность $\Phi(e)$.

Пусть теперь, наоборот, $\Phi(e)$ — аддитивная функция от множеств $e \subset Q$, принимающая только два значения 0 и 1. Если $\Phi(e) = 1$, то множество e отнесем к системе $\mathfrak{M}$. Легко видеть, что система $\mathfrak{M}$ обладает свойствами a), b), c) и d).

Таким образом изучение семейств $\mathfrak{M}$ эквивалентно изучению аддитивных функций $\Phi(e)$ $(e \subset Q)$, принимающих только два значения 0 и 1.

§ 2. Обозначим через $[Q]$ совокупность всех вещественных ограниченных функций, определенных на Q.

Положим

$$\| x \| = \sup_{q \in Q} | x(q) |.$$

Этим мы превращаем совокупность $[Q]$ в нормированное кольцо (вещественное).

Функция $f(x)$ $(x \in [Q])$ называется мультипликативным линейным функционалом в $[Q]$, если

$$1) \quad f(\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2) = \lambda \cdot f(x_1) + \mu \cdot f(x_2),$$
$$2) \quad f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2).$$

Можно показать, что в этом случае $|f(x)| \leqslant C \cdot \|x\|$ $(x \in [Q])$. Если функция $\Phi(e)$ аддитивна и принимает только значения 0 и 1, то

$$\int_Q x(q)\, d\Phi(e)$$

является мультипликативным линейным функционалом в $[Q]$.

Действительно, известно ([5]), что

$$\int_Q x(q)\, d\Phi(e) = \lim \left[\sum x(q_i) \cdot \Phi(e_i) \right],$$

где предел понимается в смысле Moor'а ([6]).

Из свойств функции $\Phi(e)$ следует, что в сумме

$$\sum x(q_i) \cdot \Phi(e_i)$$

все слагаемые, кроме одного, равны нулю.

Таким образом существует такая частично упорядоченная последовательность $\{q_\alpha\}$ элементов Q, что

$$\int_Q x(q)\,d\Phi(e) = \lim_\alpha x(q_\alpha) \quad (x \in [Q]). \tag{3}$$

Это и доказывает, что $\int_Q x(q)\,d\Phi(e)$ является мультипликативным линейным функционалом в $[Q]$.

Покажем, что обратное утверждение тоже верно. Действительно, если $f(x)$ является мультипликативным линейным функционалом в $[Q]$, то его можно представить в таком виде ([7]):

$$f(x) = \int_Q x(q)\,d\Phi(e),$$

где $\Phi(e)$ аддитивна и равна $f(x_e)$ (x_e — характеристическая функция множества e). Так как $x_e \cdot x_e = x_e$, то $\Phi(e) \cdot \Phi(e) = \Phi(e)$. Это показывает, что функция $\Phi(e)$ принимает только значения 0 и 1.

Из формулы (3) следует, что значение мультипликативного функционала $f(x)$ есть точка сгущения значений функции $x(q)$. Этот последний факт, как любезно сообщил мне И. М. Гельфанд, был им ранее получен как непосредственное следствие его общих предложений ([3]).

§ 3. Предположим теперь, что Q является бикомпактным топологическим пространством. Пусть тогда

$$f(x) = \int_Q x(q)\,d\Phi(e)$$

—произвольный мультипликативный линейный функционал в $[Q]$ (см. § 2). Обозначим через S совокупность всех замкнутых множеств $e \subset Q$, для которых $\Phi(e) = 1$. Так как $\Phi(Q) = 1$, то $Q \in S$. Пересечение двух множеств из S есть опять множество из S. Поэтому, в силу бикомпактности Q, существует точка q_0, принадлежащая всем множествам из S.

Если U_{q_0} — произвольная окрестность точки q_0, то $(Q - U_{q_0})$ будет замкнутым множеством, не содержащим точки q_0. Поэтому $\Phi(Q - U_{q_0}) = 0$ и, следовательно, $\Phi(e) = 0$, если $e \cdot U_{q_0}$ пусто.

Таким образом

$$f(x) = \int_{U_{q_0}} x(q)\,d\Phi(e),$$

где U_{q_0} — произвольная окрестность точки q_0. Теперь можно показать, что существует такая частично упорядоченная система точек $\{q_\alpha\} \subset Q$, что

$$\begin{cases} f(x) = \lim\limits_\alpha x(q_\alpha) \\ q_\alpha \to q_0 \end{cases}$$

[$q_\alpha \to q_0$, если для каждой окрестности U_{q_0} точки q_0 найдется такой индекс α_0, что для $\alpha > \alpha_0$ $q_\alpha \in U_{q_0}$ ([1])].

§ 4. В этом параграфе мы будем предполагать, что Q — топологическое пространство, имеющее такое свойство:

Если F_1 и F_2 два замкнутых множества из Q без общих точек, то найдутся такие два открытые множества G_1 и G_2, что $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$, $G_1 \cdot G_2$ пусто.

Если каждая точка такого пространства является замкнутым множеством, то это пространство будет нормальным.

Таким образом рассматриваемое пространство является более общим, чем нормальное. Через B_0 обозначим наименьшее тело *, содержащее все замкнутые и открытые множества $e \subset Q$. Через (Q) обозначим совокупность всех ограниченных, вещественных и непрерывных функций $x(q)$, определенных на Q.

Положим

$$\| x \| = \sup_{q \in Q} | x(q) |.$$

Очевидно, что тогда (Q) будет нормированным кольцом, и мультипликативный линейный функционал определяется так же, как и в § 2.

Пусть $f(x)$ является мультипликативным линейным функционалом в (Q). Если $x(q) \geqslant 0$ в Q, то ясно, что $f(x) \geqslant 0$. Так же ясно, что $f(1) = 1$.

Таким образом благодаря одной теореме А. Маркова ([8]) имеем

$$f(x) = \int_Q x(q)\, d\Phi(e),$$

где $\Phi(e)$ — аддитивная неотрицательная функция от множеств $e \in B_0$ и $\Phi(Q) = 1$.

Так как $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in (Q)$, то, пользуясь определением функции $\Phi(e)$ ([8]), можно показать, что $\Phi(e)$ принимает только два значения 0 и 1.

Наоборот, если $\Phi(e)$ — аддитивная функция от множеств $e \in B_0$, принимающая только два значения 0 и 1, то соответствующий функционал

$$f(x) = \int_Q x(q)\, d\Phi(e) \tag{4}$$

можно представить в виде

$$f(x) = \lim_{\alpha} x(q_\alpha), \tag{5}$$

и, следовательно, он является мультипликативным линейным функционалом в (Q).

Таким образом задача о нахождении общего вида мультипликативного линейного функционала в (Q) эквивалентна задаче о построении аддитивной функции от множеств $e \in B_0$, принимающей только значения 0 и 1. Последняя же задача равносильна задаче о построении системы множеств $e \in B_0$, удовлетворяющих четырем условиям a), b), c) и d) (см. § 1), причем все входящие туда множества принадлежат B_0.

Построение такой системы множеств можно произвести вполне аналогично построению системы $\mathfrak{M}$ в § 1.

В заключение заметим, что формула (5) остается верной и в том случае, когда топологическое пространство Q вполне регулярно.

Государственный университет
Одесса

Поступило
23 XI 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Birkhoff, Annals of Math., 38, 37—56 (1937). [2] И. М. Гельфанд и А. Н. Колмогоров, ДАН, XXII, № 1 (1939). [3] И. М. Гельфанд, ДАН, XXIII, № 5 (1939). [4] Г. Е. Шилов, ДАН, XXII, № 1 (1939). [5] A. Kolmogoroff, Math. An. (1930). [6] E. Moore a. H. Smith, Amer. J. of Math., XLIV, № 2 (1922). [7] T. H. Hildebrandt, Trans. Amer. Math. Soc., 36 (1934). [8] А. Марков, Матем. сб., 4 (46), 1 (1938).

---

* Система множеств образует тело, если сумма, пересечение и разность двух множеств системы также принадлежат системе.