Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 1

МАТЕМАТИКА

А. И. ПЛЕСНЕР

О ВКЛЮЧЕНИИ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ HEAVISIDE'А В СПЕКТРАЛЬНУЮ ТЕОРИЮ МАКСИМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 XI 1939)

Предметом операционного исчисления Heaviside'а является развитие исчисления для функций оператора дифференцирования $\frac{d}{dt}$, причем этот оператор применяется главным образом к функциям $\varphi(t)$, определенным для $t \geqslant 0$. В дальнейшем мы рассматриваем оператор $D = i\frac{d}{dt}$. Совокупность комплексных функций $\varphi(t)$, $t \geqslant 0$, удовлетворяющих условию $\int\limits_0^\infty |\varphi(t)|^2 dt < \infty$ (интеграл в смысле Лебега) есть унитарное пространство $H^{(0)}$, если ввести скалярное произведение $(\varphi_1, \varphi_2) = \int\limits_0^\infty \varphi_1(t)\overline{\varphi_2(t)}\,dt$. Оператор D и его область определения задаются в $H^{(0)}$ соотношениями:

$$D\varphi(t) = i\psi(t); \quad \varphi(t) = \int\limits_0^t \psi(\xi)\,d\xi, \tag{1}$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ оба принадлежат к $H^{(0)}$. D является в $H^{(0)}$ максимальным оператором, и на основе наших результатов в предыдущей заметке ([2]), полностью здесь применимых, можно было бы построить соответствующее операторное исчисление в $H^{(0)}$. Однако совокупность $H^{(0)}$ слишком узка для приложений. Поэтому введем унитарные пространства $H^{(\rho)}$, $\rho > 0$, соотношениями

$$\int\limits_0^\infty |\varphi(t)|^2 e^{-2\rho t}\,dt < \infty; \quad (\varphi_1, \varphi_2) = \int\limits_0^\infty e^{-2\rho\xi}\varphi_1(\xi)\overline{\varphi_2(\xi)}\,d\xi \tag{2}$$

и определим в $H^{(\rho)}$ оператор D опять с помощью (1), где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ сейчас принадлежат к $H^{(\rho)}$. В $H^{(\rho)}$ оператор D не эрмитов, но $D_\rho = D - \rho i E$ будет уже эрмитовым и максимальным. К D_ρ применяем результаты наших заметок ([1]) и ([2]). Каждое μ-значение из нижней полуплоскости является простым собственным значением сопряженного оператора D_ρ^*. В частности для $\mu = -\rho i$ соответствующая собственная функция $\varphi_0(t) = 1$ единичная функция Heaviside'а, которую обозначим через *1*. Инвариантное подпространство, содержащее *1*, совпадает сейчас со всем пространством $H^{(\rho)}$, и, следовательно, каждая функция $\varphi(t)$ из $H^{(\rho)}$ представима в виде

$$\varphi(t) = F(D_\rho)\,1, \tag{3}$$

где $F(\sigma)$ — граничная функция для функций $F(\lambda)$ ($\lambda = \sigma + i\tau$, $\tau > 0$), аналитических в верхней полуплоскости и удовлетворяющих условию [см. (1)]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(\lambda)|^2\, d\sigma}{|\lambda + \rho i|^2} < \varkappa.$$

Отображение $\varphi(t) \rightleftarrows F(\sigma)$ пространства $H^{(\rho)}$ на совокупность $M^{(\rho)}$ функций $F(\sigma)$, заданное соотношением (3), при котором $1 \rightleftarrows 1$, будет изометрическим, если в $M^{(\rho)}$ определить скалярное произведение

$$(F_1, F_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1(\sigma)\,\overline{F_2(\sigma)}}{\sigma^2 + \rho^2}\, d\sigma.$$

D_ρ индуцирует в $M^{(\rho)}$ изометрически эквивалентный оператор K_ρ:

$$K_\rho F(\sigma) = \sigma F(\sigma),$$

так что вместе с $F(\sigma)$ и $\sigma F(\sigma)$ принадлежит к $H^{(\rho)}$.

Пусть для $\tau = \operatorname{Im} \lambda \geqslant \rho$

$$f(\lambda) = -i\lambda \int_0^{\infty} e^{i\lambda t}\, \varphi(t)\, dt, \tag{4}$$

тогда $F(\lambda) = f(\lambda + i\rho)$ и, следовательно, отображение $H^{(\rho)}$ на $M^{(\rho)}$

$$F(\sigma) = f(s) = -is \int_0^{\infty} e^{ist}\, \varphi(t)\, dt; \quad s = \sigma + i\rho. \tag{5}$$

Интеграл (5) сходится в среднем (трансформация Фурье Plancherel'я) и по теореме Plancherel'я имеем обратную формулу

$$\varphi(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)}{s}\, e^{-ist}\, d\sigma, \tag{6}$$

которая впрочем имеет место, если заменить s любым λ, с $\operatorname{Im}\lambda \geqslant \rho$. Оператор D в $H^{(\rho)}$ индуцирует в $M^{(\rho)}$ оператор K, для которого

$$Kf(s) = K_\rho F(\sigma) + i\rho F(\sigma) = sf(s). \tag{7}$$

Пусть $G(\sigma)$ — граничная функция аналитической функции $G(\lambda)$ из кольца $\Omega(^2)$ и $G^{(\rho)}(\sigma) = G(\sigma + \rho i) = G(s)$. Для таких функций оператор $G(D)$ в $H^{(\rho)}$ определяется:

$$G(D)\,\varphi = G^{(\rho)}(D_\rho)\,\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi + i\rho)\, dE_\rho(\Delta_\xi)\,\varphi, \tag{8}$$

где $E_\rho(\Delta)$ — спектральная функция оператора D_ρ и

$$E_\rho(\Delta)\,\varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{e^{is_2(\xi - t)} - e^{is_1(\xi - t)}}{\xi - t}\, \varphi(\xi)\, d\xi,$$

если $\Delta = (\sigma_1, \sigma_2)$ и $s_1 = \sigma_1 + i\rho$, $s_2 = \sigma_2 + i\rho$.

Оператор $G(D)$ индуцирует в $M^{(\rho)}$ оператор $G(K)$

$$G(K) f(s) = G(s) f(s), \tag{9}$$

определенный для всех $f(s)$, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G(s) f(s)|^2}{|s|^2} d\sigma < \infty.$$

Определение (8) дает для каждого ρ свое $G(D)$; из (9), однако, следует, что при $\rho' > \rho$ [т. е. при расширении совокупности функций $\varphi(t)$] значение $G(D)\varphi$ в $H^{(\rho)}$ и $H^{(\rho')}$ будет одно и то же (предполагая φ из H^{ρ}). Эта однозначность определения не будет иметь места *, если с помощью (8) определить $G(D)$ для более широкого класса функций $G(\sigma)$, например, для граничных значений тела функций, получаемых из кольца Ω образованием частных. Если для полюсов $\gamma_n = \alpha_n + i\beta_n$ функции $G(\lambda)$ мнимые части β_n ограничены, то, взяв ρ больше чем все β_n, получим для $G(D)$ значение, которое согласуется с теорией Bromwich'a.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академия Наук СССР
Москва

Поступило
23 XI 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Плеснер, ДАН XXII, № 5 (1939). [2] А. Плеснер, ДАН, XXII, № 4 (1939). [3] V. Bush, Operational Circuit analysis, XIII (1929). [4] N. Wiener, Math. Ann., 95.

* Ср. сказанное по этому вопросу в ([3]). См. также ([4]).