Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 1

МАТЕМАТИКА

Академик А. Н. КОЛМОГОРОВ

КРИВЫЕ В ГИЛЬБЕРТОВСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ИНВАРИАНТНЫЕ ПО ОТНОШЕНИЮ К ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЕ ДВИЖЕНИЙ

Движением в Гильбертовском пространстве H мы будем называть любое преобразование

$$y = Kx$$

пространства H в самого себя, представимое в виде

$$Kx = a + Ux,$$

где a — фиксированный элемент пространства H, а U — унитарный оператор.

Непрерывной однопараметрической группой (НОГ) движений будем называть совокупность $\{K_t\}$ движений K_t, зависящих от действительного параметра t, пробегающего все значения между $-\infty$ и $+\infty$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) для любых s и t

$$K_{s+t} = K_s K_t;$$

2) для любого элемента x пространства H из $t_n \to t$ вытекает

$$\| K_{t_n} x - K_t x \| \to 0$$

при $n \to \infty$.

Пусть дана НОГ движений K_t и какой-либо фиксированный элемент x_0 пространства H. Рассмотрим функцию действительного аргумента t

$$\xi(t) = K_t x_0.$$

Очевидно, что функция эта непрерывна (в смысле сильной сходимости в H).

С геометрической точки зрения точка

$$x = \xi(t)$$

описывает в пространстве H некоторую кривую. Произвольное движение K преобразует функцию $\xi(t)$ в новую функцию

$$\xi_1(t) = K\xi(t).$$

Если движение $K = K_s$ принадлежит исходной НОГ движений, то

$$\xi_1(t) = \xi(t - s),$$

т. е. кривая $\xi(t)$ отображается преобразованием $K = K_s$ на самое себя. Иначе говоря, кривая $\xi(t)$ инвариантна по отношению к преобразованиям K_s исходной НОГ. Если K не принадлежит исходной НОГ, то кривая $\xi(t)$ переводится преобразованием K, вообще говоря, в новую конгруентную ей кривую. Не останавливаясь далее на разъяснении геометрической терминологии, связанной с понятиями кривой, конгруентности и т. д., сформулируем задачу дальнейшего исследования в аналитической форме.

Определение. *Функция $\xi(t)$ со значениями из H, определенная для всех действительных t, принадлежит классу $\mathfrak{K}$, если она может быть представлена в виде $\xi(t)=K_t x_0$, где x_0—элемент H, а $\{K_t\}$ — НОГ движений пространства H.*

Целью настоящей работы является изучение класса функций класса $\mathfrak{K}$ и в частности их свойств, инвариантных по отношению к движениям, т. е. свойств, которые остаются неизменными при переходе от функции $\xi(t)$ к функции

$$\xi_1(t)=K\xi(t),$$

каково бы ни было движение K.

Рассмотрим какую-либо функцию $\xi(t)$ класса K и положим

$$B_\xi(\tau_1, \tau_2)=\big(\xi(t+\tau_1)-\xi(t), \xi(t+\tau_2)-\xi(t)\big). \tag{1}$$

[Очевидно, что $B_\xi(\tau_1, \tau_2)$ не зависит от t.] Обозначим через H_ξ минимальное замкнутое линейное подпространство пространства H, содержащее все разности $\xi(t+\tau)-\xi(t)$, через G_ξ пространство $H-H_\xi$, состоящее из всех элементов $x\in H$, ортогональных к H_ξ, и через α_ξ — размерность G_ξ (которая может равняться $0, 1, 2, \ldots$, или ∞).

При этих обозначениях имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. *Если $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ принадлежат классу $\mathfrak{K}$, то для существования движения K, преобразующего ξ_1 в ξ_2, т. е. движения, для которого*

$$\xi_2(t)=K\xi_1(t),$$

необходима и достаточна совокупность двух условий: 1) $\alpha_{\xi_1}=\alpha_{\xi_2}$, 2) $B_{\xi_1}(\tau_1, \tau_2)=B_{\xi_2}(\tau_1, \tau_2)$ для всех τ_1 и τ_2.

Теорема 2. *Для того чтобы данному α ($\alpha=0, 1, 2, \ldots$, или ∞) и данной функции $B(\tau_1, \tau_2)$ соответствовала хотя бы одна функция $\xi(t)$ класса $\mathfrak{K}$,*

$$\alpha_\xi=\alpha, \quad B_\xi(\tau_1, \tau_2)=B(\tau_1, \tau_2),$$

необходимо и достаточно, чтобы $B(\tau_1, \tau_2)$ было представимо в виде

$$B(\tau_1, \tau_2)=\oint_{-\infty}^{+\infty}(e^{i\lambda\tau}-1)(e^{-i\lambda\tau_2}-1)\,dF(\Delta_\lambda)+\theta\tau_1\tau_2, \tag{2}$$

где интеграл понимается в смысле

$$\oint_{-\infty}^{+\infty}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{+\varepsilon}^{+\infty},$$

θ — произвольная константа, а функция интервала $F(\Delta_\lambda)$ удовлетворяет следующим условиям:

A) *она определена для всех Δ_λ, для которых нуль не принадлежит к числу внутренних или концевых точек, аддитивна и непрерывна справа относительно концов Δ_λ;*

B) $F(\Delta_\lambda)\geqslant 0$;

C) *интегралы*

$$\int_{-\infty}^{-1} dF(\Delta_\lambda), \quad \oint_{-1}^{+1} \lambda^2\, dF(\Delta_\lambda), \quad \int_{+1}^{+\infty} dF(\Delta_\lambda)$$

конечны.

Теорема 3. *Функция $B(\tau_1, \tau_2)$, представимая в виде* (2) *с соблюдением условий A), B), C), может быть представлена таким образом единственным способом.*

Определенные таким образом однозначно функция $F(\Delta_\lambda)$ и константа θ, соответствующие $B_\xi(\tau_1, \tau_2)$ для данной функции $\xi(t)$ класса $\mathfrak{K}$, обозначаются $F_\xi(\Delta_\lambda)$ и θ_ξ.

Из теорем 1, 2 и 3 вытекает, что полную систему инвариантов относительно движений для кривой $\xi(t)$ класса $\mathfrak{K}$ образуют

$$\alpha_\xi, \ \theta_\xi \ \text{и} \ F_\xi(\Delta_\lambda).$$

При этом для существования кривой класса $\mathfrak{K}$ с данными α ($\alpha = 0, 1, 2, \ldots$, или ∞), θ (которое может быть любым комплексным числом) и $F(\Delta_\lambda)$ необходимо и достаточно, чтобы функция интервала $F(\Delta_\lambda)$ удовлетворяла условиям A), B) и C) теоремы 2.

Спектральное представление (2) функции $B_\xi(\tau_1, \tau_2)$ связано со спектральным представлением самой функции $\xi(t)$, указываемым в следующей теореме:

Теорема 4. *Каждая функция $\xi(t)$ класса $\mathfrak{K}$ может быть единственным способом представлена в виде*

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\lambda t} - 1)\, d\Phi(\Delta_\lambda) + ut + v, \tag{3}$$

где u и v — элементы H, а $\Phi(\Delta_\lambda)$ — функция интервала Δ_λ, со значениями из H, обладающая следующими свойствами:

1° *$\Phi(\Delta_\lambda)$ определена для всех интервалов Δ_λ, для которых нуль не принадлежит к числу концевых или внутренних точек, аддитивна и непрерывна справа относительно концов Δ_λ;*

2° *если Δ'_λ и Δ''_λ не пересекаются, то*

$$(\Phi(\Delta'_\lambda), \ \Phi(\Delta''_\lambda)) = 0;$$

3° *интегралы*

$$\int_{-\infty}^{-1} dF(\Delta_\lambda), \quad \oint_{-1}^{+1} \lambda^2\, dF(\Delta_\lambda), \quad \int_{+1}^{+\infty} dF(\Delta_\lambda),$$

где

$$F(\Delta_\lambda) = \|\Phi(\Delta_\lambda)\|^2, \tag{4}$$

конечны.

При этом интегралы $\oint$ понимаются в смысле, указанном в теореме 2, и

$$F(\Delta_\lambda) = F_\xi(\Delta_\lambda), \quad \|u\|^2 = \theta_\xi,$$

где $F_\xi(\Delta_\lambda)$ и θ_ξ имеют ранее определенный смысл.

Функцию $\Phi(\Delta_\lambda)$ и элементы u и v пространства H, соответствующую по теореме 4 функции $\xi(t)$ класса $\mathfrak{K}$, будем обозначать

$$\Phi_\xi(\Delta_\lambda), \ u_\xi, \ v_\xi.$$

Теорема 5. *Для того чтобы данным u и v из H и функции интервала $\Phi(\Delta_\lambda)$ со значениями из H соответствовала по формуле* (3) *функция $\xi(t)$ из $\mathfrak{K}$, необходимо и достаточно, чтобы $\Phi(\Delta_\lambda)$ удовлетворяла условиям 1°, 2° и 3° теоремы 4.*

Отметим в заключение, что функция класса $\mathfrak{K}$ в том и только в том случае может быть представлена в виде

$$\xi(t) = U_t x_0, \tag{5}$$

где $\{U_t\}$ есть НОГ унитарных операторов, когда норма

$$\|\xi(t)\| = r$$

постоянна при всех t, т. е. в том и только в том случае, когда кривая $\xi(t)$ расположена на сфере

$$\|x\| = r.$$

Класс функций, представимых в виде (5), будем обозначать $\mathfrak{K}_0$. Для функций класса $\mathfrak{K}_0$ все предложения, аналогичные теоремам 1—5, выводятся непосредственно из спектрального представления соответствующей группы $\{U_t\}$ и иногда в несколько иной форме хорошо известны.

Рассмотрение произвольной функции класса $\mathfrak{K}$ может быть сведено к рассмотрению функций класса $\mathfrak{K}_0$ на основе следующего замечания: если $\xi(t)$ принадлежит $\mathfrak{K}$, то

$$\zeta_h(t) = \frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h}$$

принадлежит $\mathfrak{K}$. Функции $\zeta_h(t)$ представляются в виде

$$\zeta_h(t) = U_t \zeta_h(0),$$

где операторы

$$U_t = \int e^{i\lambda t}\, dE(\Delta_\lambda)$$

не зависят от h. Поэтому

$$\zeta_h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\, d\Psi_h(\Delta_\lambda),$$

где

$$\Psi_h(\Delta_\lambda) = E(\Delta_\lambda)\, \zeta_h(0).$$

Доказывается существование предела

$$\lim_{h\to 0} \Psi_h(\Delta_\lambda) = \Psi(\Delta_\lambda)$$

и полагается

$$\Phi(\Delta_\lambda) = \int_{\Delta_\lambda} \frac{d\Psi(\Delta_\lambda)}{i\lambda}.$$

Полученная таким образом функция Φ и есть функция Φ_ξ теоремы 2. Полные доказательства будут опубликованы в другом месте.

Поступило
23 XI 1939