Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 1

МАТЕМАТИКА

Академик О. Ю. ШМИДТ

О ГРУППАХ FROBENIUS'A

Одним из крупнейших результатов теории характеров групп является известная теорема Frobenius'a [1].

Если в транзитивной группе подстановок n символов каждая подстановка перемещает не менее $n-1$ символов, то подстановки, перемещающие все символы, образуют вместе с единицей группы нормальный делитель порядка n.

Или в абстрактной формулировке:

Если в группе $\mathfrak{G}$, порядка $g=nh$, есть подгруппа $\mathfrak{H}$ порядка h и индекса n, совпадающая со своим нормализатором и взаимно простая со всеми сопряженными с нею подгруппами, то $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель порядка n, состоящий из элементов, не входящих в $\mathfrak{H}$ и ее сопряженные, и единицы.

Попытки доказательства этой теоремы без помощи теории характеров пока безуспешны. Будем группы, удовлетворяющие условиям теоремы Frobenius'a, называть группами Frobenius'a.

Было обращено внимание на структуру того нормального делителя $\mathfrak{F}$ порядка n, существование которого устанавливается теоремой Frobenius'a. Во всех ранее известных случаях этот нормальный делитель оказывался коммутативным. Еще Jordan [2] до Frobenius'a элементарным способом доказал частный случай теоремы для дважды транзитивных групп и установил, что в этом случае нормальный делитель $\mathfrak{F}$ коммутативный. Burnside [3] также элементарными соображениями установил теорему Frobenius'a для четного h. При четном h нормальный делитель также оказывается коммутативным.

Наконец, недавно L. Weisner [4] опубликовал работу, в которой и для общего случая делается попытка доказать, что $\mathfrak{F}$ — всегда коммутативная подгруппа.

Целью настоящей заметки является, наоборот, установить путем конструкции конкретного примера, что существуют группы Frobenius'a, у которых нормальный делитель $\mathfrak{F}$ — не коммутативная группа.

В § 1 указывается пример группы Frobenins'a порядка $1029=3\cdot 7^3$ с некоммутативным нормальным делителем порядка $7^3=343$. Затем устанавливается, в чем именно заключается ошибка в рассуждениях L. Weisner'a. В § 2 на основании анализа представлений групп $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$, данного Frobenius'ом, формулируется общее необходимое и достаточное условие, при котором группа $\mathfrak{F}$ будет коммутативной.

§ 1. Зададим группу $\mathfrak{G}$ следующими равенствами:

$$\begin{array}{ll} Q^7 = R^7 = 1, & T^3 = 1 \\ R^{-1} Q^{-1} RQ = P, & P^7 = 1 \\ QT = TQ^2P & RQ = QRP \\ RT = TR^2 & PQ = QP \\ RT = TP^4 & PR = RP \end{array}$$

Легко проверить, что:

а) каждый элемент группы представляется в виде $T^\alpha Q^\beta R^\gamma P^\delta$, причем все эти элементы различны, когда показатели положительны и не превосходят порядка соответствующего образующего элемента;

б) порядок группы, следовательно, $g = 3 \cdot 7^3 = 1029$;

в) подгруппа третьего порядка $\mathfrak{H} = \{T\}$ совпадает со своим нормализатором и взаимно проста со своими сопряженными, составляя вместе с ними класс из 343 подгрупп;

г) существует 342 элемента 7-го порядка, которые вместе с единицей составляют нормальный делитель порядка 343, а именно $\mathfrak{F} = \{Q, R\}$, в который, конечно, входит и P;

д) при преобразовании элементами $\mathfrak{F}$ (кроме единицы) все 343 сопряженные с $\mathfrak{H}$ подгруппы перемещаются между собой;

е) нормальный делитель $\mathfrak{F}$ — не коммутативная группа.

Таким образом утверждение L. Weisner'a (4) оказывается неверным. Ошибочное место его рассуждений находится на стр. 86, а именно, из

$$a_{vk}\, a_{wk} = 0 \qquad (v \neq w)$$

делается неверный вывод, что $a_{vk} = \nu_k$ или 0, тогда как в обозначении Weisner'a следовало

$$\frac{n_v}{m} a_{vk} = \nu_k \text{ или } 0.$$

Впрочем Frobenius давно показал, что $a_{vk} = 1$ или 0 (см. ниже).

§ 2. G. Frobenius (1) подробно осветил представления своих групп и их подгрупп, обозначенных выше $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$, в виде групп линейных подстановок (матриц).

Именно при доказательстве рассматриваемой теоремы Frobenius и применил впервые свою известную теорию связи характеров группы и ее подгруппы.

Оказывается по Frobenius'y, что неприводимые представления рассматриваемых групп $\mathfrak{G}$ распадаются на два вида. Кроме единичного представления это, во-первых, представления, равные для элементов $\mathfrak{H}$ (и сопряженных) неприводимым представлениям самой подгруппы $\mathfrak{H}$. В них все элементы нормального делителя $\mathfrak{F}$ изображены единичными матрицами. Эти представления не входят в приведение $\mathfrak{G}$, как группы подстановок степени n. Во-вторых, $\mathfrak{G}$ имеет неприводимые представления Γ_s степеней $f_s\,(s = 1, 2, \ldots)$, входящие в приведение группы подстановок $r_s > 0$ раз, при этом $f_s = hr_s$, где h — порядок подгруппы $\mathfrak{H}$.

При дальнейшем приведении нормального делителя $\mathfrak{F}$ каждое представление Γ_s распадается на h неприводимых представлений группы $\mathfrak{F}$, взятых каждое по одному разу, причем эти h неприводимых представлений имеют одинаковые степени, равные r_s — индексу Γ_s в группе подстановок $\mathfrak{G}$. Каждое неприводимое представление $\mathfrak{F}$ при этом входит только в одно из Γ_s.

Если подгруппа $\mathfrak{F}$ коммутативна, то все ее неприводимые представления должны быть первой степени. Из вышеприведенного следует, что в этом случае все $r_s = 1$.

Таким образом можно формулировать следующий критерий:

В группе Frobenius'а 𝔊, изображаемой группой подстановок степени n, соответствующий нормальный делитель порядка n будет коммутативным тогда и только тогда, когда каждое неприводимое представление 𝔊 появляется при приведении группы подстановок не более одного раза.

Поступило
27 XII 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Frobenius, Sitzungsberichte Berliner Akademie der Wissenschaften, S. 1223—1230 (1901). [2] C. Jordan, Liouv. Journ., ser. II, 17 (1872). [3] W. Burnside, Theory of Groups of finite order, 172 (1911). [4] L. Weisner, Duke Mathematical Journal, 5, № 1 (1939).