АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ РЕГУЛЯРНЫХ ФЕРМ ТИПА ПЛАСТИН

О.В.Громыко
Гомельский политехнический институт им. П.О.Сухого (Гомель)

Предлагается простой, рациональный подход, позволяющий использовать аналитические и численные решения задач теории колебаний тонкостенных конструкций типа пластин и оболочек, для оценки частот свободных колебаний регулярных ферменных конструкций.

В случаях, когда регулярная ферма типа пластины или оболочки имеет большое число стержневых элементов и узлов сочленений, использование классических методов исследования динамики конструкций оказывается громоздким и затруднительным. В работе [1] рассмотрены вопросы использования континуальных моделей при расчете многопролетных регулярных ферм. Основой для перехода к континуальной модели является принцип эквивалентности энергии деформации (кинетической энергии) наименьшей повторяющейся ячейки фермы и соответствующего ей эффективного объема континуума. Если дискретная модель имеет несколько стержневых слоев, в соответствие ей ставится многослойный континуум, причем, характеристики слоев вычисляются независимо. В общем случае матрица упругих постоянных «обобщенного закона Гука» $\{\sigma_j\}=\left[B_j\right]\{\varepsilon_j\}$ для j-го слоя, включающего **m** стержней, соответствует аналогичной матрице для анизотропного материала:

$$\left[B_j\right]=\sum_{i=1}^{m}\frac{E_iF_iL_i}{V_{\text{эф}j}}\{l_i\}\{l_i\}^T \qquad (1)$$

где E_i, F_i, L_i – модуль упругости материала, площадь поперечного сечения и длина i-го стержня (i=1...m); $V_{\text{эф}j}$ – эффективный объем j-го стержневого слоя элементарной ячейки; $\{l_i\}=\{l_i^2\ \ m_i^2\ \ n_i^2\ \ l_im_i\ \ m_in_i\ \ n_il_i\}^T$ – вектор произведений направляющих косинусов (l_i, m_i, n_i) i-го стержня.

Связь внутренних усилий и моментов в оболочке с деформациями устанавливается при помощи усредненных по толщине пакета h компонент тензоров мембранной $\hat{A}$, изгибно-мембранной $\hat{C}$ и изгибной $\hat{D}$ жесткостей:

$$[\hat{A},\hat{C},\hat{D}]=\sum_j\int_{hj}f([B_j])(1,z,z^2)dz\,, \qquad (2)$$

где $f([B_j])$ – кусочно-постоянная функция упругих характеристик пакета.

Инерционные характеристики, соответствующие массе единицы поверхности и параметру инерции вращения поперечного сечения оболочки, вычисляются следующим образом:

$$I_1=\frac{1}{S_{\text{эф}}}\Big(\sum_{i=1}^{k}\rho_iF_iL_i+\sum_{j=1}^{n}M_j\Big),\quad I_2=\frac{1}{S_{\text{эф}}}\Big(\sum_{i=1}^{k}J_i^1+\sum_{j=1}^{n}J_j^2\Big), \qquad (3)$$

где ρ_i - плотность материала i-го стержня элементарной ячейки; M_j – величина j-ой присоединенной массы (например, узла сочленения стержней); J_i^1, J_j^2 – моменты инерции i-го стержня и j-ой присоединенной массы относительно координатной поверхности; $S_{\text{эф}}$ – площадь элементарной ячейки в плане.

Использование соотношений (2) и (3) совместно с уравнениями движения тонкостенных конструкций позволяет определить частоты и формы собственных колебаний многопролетных ферм. Наиболее ярко преимущества предложенного подхода проявляются при использовании аналитических решений теории пластин и оболочек. Для тетраэдрической фермы [1], все стержни которой выполнены из одного материала и имеют одинаковые размеры, можно построить приближенную трехслойную континуальную модель с изотропными слоями, характеризуемую коэффициентом Пуассона $\mu=1/3$, изгибной жесткостью $D=\frac{\sqrt{3}}{4}EFL$ и параметром инерции $I_1=6\sqrt{3}\frac{\rho F}{L}$.

Если платформа является фермой типа балки (шириной S, значительно меньшей длины

α и толщины $h=\sqrt{2/3}L$), то жесткость при изгибе вычисляется по формуле:

$$(EJ)_{привед} = DS(1-\mu^2) = \frac{2\sqrt{3}}{9}EFLS,$$

а погонная масса балки $m_0 = I_1 S$. Низшая частота свободных колебаний конструкции типа балки определяется соотношением [2]:

$$f = \frac{22.373}{2\pi\alpha^2}\sqrt{\frac{EJ}{m_0}} \approx 0.685\frac{L}{\alpha^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{Гц}). \tag{4}$$

Для фермы типа квадратной пластины со стороной α

$$f = \frac{14.1}{2\pi\alpha^2}\sqrt{\frac{D}{I_1}} \approx 0.458\frac{L}{\alpha^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{Гц}). \tag{5}$$

Частота основного тона собственных колебаний ферменного поля типа круглой пластины диаметром d вычисляется по формуле [2]:

$$f = \frac{20.3}{2\pi d^2}\sqrt{\frac{D}{I_1}} \approx 0.66\frac{L}{d^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{Гц}). \tag{6}$$

Исследовалось влияние длины L типичного стержня фермы, генеральных размеров платформы α или d, механических свойств материала стержней (модуля упругости E и плотности ρ) на частоту основного тона свободных колебаний конструкции. В качестве используемого материала для стержней регулярной ферменной конструкции типа платформы (пластины) предполагался алюминиевый сплав (Ал) и графито-эпоксид (ГЭ).

Из формул (4)-(6) следует, что площадь поперечного сечения стержней не влияет на частоты свободных колебаний больших регулярных ферменных конструкций. Отметим, что при анализе собственных частот во всех случаях не учитывались массы узлов сочленений стержней и масса дополнительного оборудования, установленного на регулярных фермах типа пластин, т.е. $M_i=0$, $J_i^1=J_j^2=0$ (см. формулы (3)). Таким образом, приведенные оценки частот собственных колебаний рассматриваемых конструкций являются верхними.

Из (4)−(6) также следует, что низший тон колебаний конструкций рассматриваемого типа пропорционален длине стержней L, скорости звука в материале стержней $c=\sqrt{E/\rho}$ и обратно пропорционален квадрату генерального размера фермы α или d. Большие многопролетные ферменные поля имеют очень низкие и сверхнизкие ($\sim 10^{-4}$ Гц при $\alpha \approx 5 \cdot 10^3$ м и $L \approx 1$ м) частоты собственных колебаний, которые могут совпасть с частотами различных систем, связанных с большой регулярной ферменной конструкцией типа пластины.

Предлагаемый подход при расчете низших частот собственных колебаний и полученные оценки частот для нескольких типов конструкций позволяют решить ряд задач, возникающих при проектировании больших регулярных ферменных конструкций перекрытий в строительстве или крупногабаритных структур для применения на околоземных орбитах в космонавтике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Усюкин В.И., Громыко О.В. Расчет регулярных стержневых конструкций по континуальной схеме. - В кн.: Расчеты на прочность. Вып.26 - М.: Машиностроение, 1985.
2. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. - М.: Высшая школа, 1980.

К МЕТОДУ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТОЛЬКО С ЧЕТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

А.Ю.Виноградов
Институт Прикладной Механики РАН (Москва)

Многие прикладные задачи теории пластин, оболочек и конструкций из них математически моделируются с помощью линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих только четные производные [1, 2]. В работе [3] были изложены основы идеи метода решения краевых задач строительной механики для дифференциальных уравнений только с четными производными. В дальнейшем [4, 5] излагались существенные для реализации метода аспекты процедур вычисления. Здесь приводится реализация метода для та-